

Formelsammlung der Mechanik WS1819

Daniela Rasser

Clemens Mittermaier

Wintersemester 2018/19

Inhaltsverzeichnis

1	Formelzeichen, SI - Einheiten und wichtige Konstanten	4
1.1	Bewegung	4
1.2	Masse / Dichte / Volumen	4
1.3	Impuls	4
1.4	Kraft	4
1.5	Energie	4
1.6	Mechanische Leistung	4
1.7	Gravitation	4
1.8	Spezielle Relativitätstheorie	4
1.9	Mechanik starrer Körper	5
1.10	Mechanik deformierbarer Körper	5
1.11	Gase	5
2	Mechanik in einer Dimension	5
2.1	Bewegung	5
2.1.1	Geradlinige, gleichförmige Bewegung	5
2.1.2	Gleichmäßig beschleunigte Bewegung	5
2.1.3	Beschleunigte Bewegung	5
2.2	Masse / Dichte / Volumen	6
2.3	Impuls	6
2.4	Kraft	6
2.4.1	Gewichtskraft	6
2.4.2	Zentripetalkraft	6
2.4.3	Haftreibungskraft	6
2.4.4	Gravitation	6
2.4.5	Hooksches Gesetz	6
2.5	Energien	6
2.5.1	Arbeit:	6
2.5.2	Kinetische Energie (Bewegungsenergie):	6
2.5.3	Rotationsenergie:	7
2.5.4	Potentielle Energie (Höhenenergie):	7
2.5.5	Innere Energie eines Gases:	7
2.5.6	Volumenänderungsarbeit:	7
2.5.7	Relativistische Energie	7
2.6	Stöße	7
2.6.1	Impuls- und Energieerhaltung bei elastischen Stößen	7
2.6.2	Inelastischer Stoß	7
2.6.3	Ebene Stöße ungleicher Massen	7
2.7	Mechanische Leistung	7
2.8	Keplersche Gesetze	8
2.9	Spezielle Relativitätstheorie	8
2.9.1	Wellenlänge:	8
2.9.2	Dopplereffekt	8
2.9.3	Zeitdilatation	8
2.9.4	Bewegte Maßstäbe	8
2.9.5	Relativistische Massenzunahme	8
2.9.6	Relativistische Energie	8

2.10	Mechanik starrer Körper	9
2.10.1	Steinersche Satz	9
2.10.2	Trägheitsmoment	9
2.10.3	Drehmoment	9
2.11	Mechanik deformierbarer Körper	9
2.11.1	Poissonzahl	9
2.11.2	Stress und Strain	9
2.11.3	Kompressionsmodul	9
2.12	Mechanik der Flüssigkeiten und Gase	9
2.12.1	Allgemeine Gasgleichung	9
2.12.2	Avogadro - Gleichung	9
2.12.3	van-der-Vaals - Gleichung	9
2.12.4	Gasprozesse	10
2.12.5	Kompression von Gas	10
2.12.6	Erster Hauptsatz Thermodynamik	10
3	Mechanik in drei Dimensionen	10
3.1	Bewegung	10
3.1.1	Tangentenvektor	10
3.2	Impulserhaltung	10
3.3	Kräfte	10
3.3.1	Corioliskraft	10
3.4	Drehimpuls	11
3.4.1	Drehmoment	11
3.4.2	Starrer Rotator	11

1 Formelzeichen, SI - Einheiten und wichtige Konstanten

1.1 Bewegung

- Zeit: t mit *Sekunde*(s)
⇒ Umlaufzeit: T mit *Sekunde*(s)
⇒ Frequenz: f mit $\frac{1}{s}$
- Strecke, bzw. Ortsänderung: x , bzw. s mit *Meter*(m)
- Geschwindigkeit: v mit $\frac{\text{Meter}(m)}{\text{Sekunde}(s)}$
⇒ Lichtgeschwindigkeit c mit $\frac{\text{Meter}(m)}{\text{Sekunde}(s)}$
⇒ Winkelgeschwindigkeit: ω mit $\frac{1}{s}$ in π
- Beschleunigung: a mit $\frac{\text{Meter}(m)}{\text{Sekunde}^2(s^2)}$

1.2 Masse / Dichte / Volumen

- Masse m mit *Kilogramm*(kg)
- Dichte ρ mit $\frac{\text{Kilogramm}(kg)}{\text{Meter}(m)^3}$

1.3 Impuls

Impuls p mit $\frac{\text{Kilogramm}(kg) \cdot \text{Meter}(m)}{\text{Sekunde}(s)}$ oder *Newton*(N) · *Sekunde*(s)

1.4 Kraft

- F mit *Newton*(N)
- Haftreibungskoeffizient μ_{HR}
- Federkonstante D mit $\frac{\text{Newton}(N)}{\text{Meter}(m)}$

1.5 Energie

E , bzw W , bzw U mit *Joule*(J) = $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = N \cdot m$

1.6 Mechanische Leistung

P mit $\frac{\text{Kilogramm}(kg) \cdot \text{Meter}(m)^2}{\text{Sekunde}(s)} = \frac{J}{s} = W$ (Watt)

1.7 Gravitation

- Gravitationskonstante γ , bzw. G mit $6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Meter}(m)^3}{\text{Kilogramm}(kg) \cdot \text{Sekunde}(s)^2}$

1.8 Spezielle Relativitätstheorie

- Wellenlänge λ in *Meter*(m)

1.9 Mechanik starrer Körper

- Trägheitsmoment I oder Θ
- Drehmoment M

1.10 Mechanik deformierbarer Körper

- Stress / Spannung σ , bzw. auch Druck p in *Pascal*
- Strain / Dehnung ϵ in *Meter(m)*

1.11 Gase

- Stoffmenge n in *mol*
- Gaskonstante R mit $8.31 \frac{\text{Kilogramm(kg)} \cdot \text{Meter(m)}^2}{\text{Sekunde(s)}^2 \cdot \text{mol} \cdot \text{Kelvin(K)}}$
- Temperatur T mit *Kelvin(K)*

2 Mechanik in einer Dimension

2.1 Bewegung

2.1.1 Geradlinige, gleichförmige Bewegung

$$v(t) = \frac{x}{t}$$

2.1.2 Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

$$x(t) = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2 + x_0 \cdot x(t) \Rightarrow \text{Ortsänderung}$$

$$x' = v(t) = g \cdot t + v_0 \Rightarrow \text{Geschwindigkeit} = \text{Ableitung der Ortsänderung}$$

$$x''(t) = v'(t) = a(t) = \textit{konstant} \Rightarrow \text{Beschleunigung} = \text{Ableitung der Geschwindigkeit} = \text{Zweite Ableitung der Ortsänderung}$$

$$v^2 - v_0 = 2 \cdot a \cdot \Delta x \quad a(t) = g \text{ Erdbeschleunigung} = 9.81 \frac{m}{s}$$

Kreisbewegungen

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

$$v = \omega \cdot r \Rightarrow \text{Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn}$$

$$a(t) = \omega^2 \cdot r$$

$$\tau(s) = \frac{\Delta r(s)}{\Delta s}, \text{ wobei } |\tau(s)| = 1 \Rightarrow \text{Tangentenvektor}$$

2.1.3 Beschleunigte Bewegung

$$v(t) = v(0) \cdot \int a(t) dt$$

$$x(t) = x(0) \cdot \int v(t) dt$$

2.2 Masse / Dichte / Volumen

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$m = \frac{4\pi}{3} r^3 \cdot \rho_0 \Rightarrow \text{Berechnung der Masse einer Kugel}$$

$$m_{\text{schwarz.Loeh}} = \frac{2\gamma}{c^2} \cdot r_H$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \text{relativistische Massenzunahme}$$

2.3 Impuls

$$p = m \cdot v$$

Merke:

Es gilt der Impulserhaltungssatz.

2.4 Kraft

$$F = \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = m \cdot a \Rightarrow \text{Kraft} = \text{Impulsänderung nach der Zeit}$$

$$F = W'(t) \Rightarrow \text{Kraft} = \text{Arbeitsänderung nach der Ortsänderung}$$

2.4.1 Gewichtskraft

$$F_G = m \cdot g$$

.

2.4.2 Zentripetalkraft

$$F_z = m \cdot a = m \cdot \omega \cdot r = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

2.4.3 Haftreibungskraft

$$F_{HR} = \mu_{HR} \cdot |F|$$

2.4.4 Gravitation

$$F = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{1 \rightarrow 2}^2} \cdot r_{1 \rightarrow 2} = -F_{1 \rightarrow 2} = F_{2 \rightarrow 1}$$

2.4.5 Hooksches Gesetz

$$F = D \cdot \Delta s$$

2.5 Energien

2.5.1 Arbeit:

$$W = F \cdot s \Rightarrow \text{Für } F \text{ konstant}$$

$$W = \int F(s) ds$$

2.5.2 Kinetische Energie (Bewegungsenergie):

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_{Kin} = \frac{1}{2} \cdot I_i \cdot \omega^2 \Rightarrow \text{Trägheitsmoment } I$$

2.5.3 Rotationsenergie:

$$E_{Rot.} = \frac{1}{2} \theta \cdot \omega^2$$

2.5.4 Potentielle Energie (Höhenenergie):

$$E_{Pot} = m \cdot g \cdot h$$

$$E_{Pot} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2 = - \int_0^x (-D \cdot x) dx \Rightarrow \text{Potentielle Energie einer Feder}$$

$$E_{Pot} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot m_0}{r} = \vec{\Phi}(r)$$

2.5.5 Innere Energie eines Gases:

$$U = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T$$

$$U_{vw} = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R \cdot T - \frac{n^2 \cdot a}{V^2} \Rightarrow \text{Innere Energie durch die Van-der-Vaals - Gleichung}$$

$$\Delta U = c_v \cdot m (T_2 - T_1) = c_v \cdot m \cdot T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = c_v \cdot m \cdot T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \Rightarrow \text{innere Energie bei isochoren Gasprozessen}$$

$$\Delta U = c_v \cdot m (T_2 - T_1) \Rightarrow \text{innere Energie bei isobaren Gasprozessen}$$

2.5.6 Volumenänderungsarbeit:

$$W_v = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) \Rightarrow \text{Volumenänderungsarbeit bei isothermen Prozessen}$$

$$W_v = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} dV$$

2.5.7 Relativistische Energie

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$E = m \cdot c^2 = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 c^2} \Rightarrow \text{Gesamtenergie aus relativistischem Impuls}$$

Merke:

Es gilt der Energieerhaltungssatz

2.6 Stöße

2.6.1 Impuls- und Energieerhaltung bei elastischen Stößen

$$p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2 \quad m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2$$

$$E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2$$

2.6.2 Inelastischer Stoß

$$p_1 + p_2 = p \Rightarrow \text{Führt zu Energieverlust}$$

2.6.3 Ebene Stöße ungleicher Massen

$$v'_1 \cdot v'_2 = |v'_1| \cdot |v'_2| \cdot \cos(\alpha)$$

2.7 Mechanische Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{W}{t} \Rightarrow \text{bei konstanter Arbeit}$$

$$P = F(t) \cdot v(t)$$

2.8 Keplersche Gesetze

1. Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen
2. Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der Satelliten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

2.9 Spezielle Relativitätstheorie

2.9.1 Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

2.9.2 Dopplereffekt

Klassisch:

$$\lambda_{\text{Beobachter}} = \frac{c}{f_{\text{Beobachter}}} = \lambda_{\text{Sender}} - \frac{v_{\text{Sender}}}{f_{\text{Sender}}}$$

⇒ Die zeitliche Stauchung oder Dehnung eines Signals bei Veränderung des Abstandes zwischen Sender und Empfänger.

Relativistisch:

$$f' = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \Rightarrow \text{Sender entfernt sich vom Empfänger}$$

$$f' = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \Rightarrow \text{Sender bewegt sich auf Empfänger zu}$$

2.9.3 Zeitdilatation

$$d' = \sqrt{d^2 + (v \cdot \Delta t_{\text{bewegt}})^2}$$

$$\Delta t_{\text{bewegt}} = \frac{\Delta t_{\text{ruhend}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \text{Dauer einer Sekunde auf dem bewegten Objekt}$$

2.9.4 Bewegte Maßstäbe

$$L_{\text{bewegt}} = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \leq L$$

2.9.5 Relativistische Massenzunahme

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

2.9.6 Relativistische Energie

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot c^2 + m_0 \cdot c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

$$E = m \cdot c^2 = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 c^2} \Rightarrow \text{Gesamtenergie aus relativistischem Impuls}$$

2.10 Mechanik starrer Körper

2.10.1 Steinersche Satz

$$I = I_s + m \cdot r^2$$

2.10.2 Trägheitsmoment

$$I = \sum_j R_j^2$$

2.10.3 Drehmoment

$$M = F \cdot h$$

$$M = I \cdot \omega'$$

$$\omega = \frac{M \cdot t}{I}$$

2.11 Mechanik deformierbarer Körper

2.11.1 Poissonzahl

$$v = \frac{-\Delta d \cdot l_0}{\Delta l \cdot d_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta v}{v_0} = (1 - 2 \cdot v) \frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow \text{Volumenänderung}$$

2.11.2 Stress und Strain

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Young'sches Modul

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{F}{\epsilon \cdot A} = \frac{l_0 \cdot F}{(l - l_0) \cdot A}$$

2.11.3 Kompressionsmodul

$$\sigma = p = \frac{F}{A} \Rightarrow \text{Druck}$$

2.12 Mechanik der Flüssigkeiten und Gase

2.12.1 Allgemeine Gasgleichung

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

2.12.2 Avogadro - Gleichung

$$\frac{p \cdot V}{T} = n \cdot R$$

2.12.3 van-der-Vaals - Gleichung

$$p_{vw} = \frac{n \cdot R \cdot T}{V - n \cdot b} - \frac{n^2 \cdot a}{V^2}$$

2.12.4 Gasprozesse

1. Isochor: p/T konstant

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Delta U = c_v \cdot m(T_2 - T_1) = c_v \cdot m \cdot T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = c_v \cdot m \cdot T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \Rightarrow \text{Energie}$$

$$Q = \Delta U = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1) \Rightarrow \text{Wärmeumsatz}$$

2. Isobar: V/T konstant

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad W = -(p \cdot V_2 - p \cdot V_1) = -n \cdot R \cdot \Delta T = -p(V_2 - V_1)$$

$$\Delta U = c_v \cdot m(T_2 - T_1) \Rightarrow \text{Energie}$$

$$Q = \Delta U - W = (c_v + R_s)m(T_2 - T_1) = c_p \cdot m(T_2 - T_1)$$

3. Isotherm: pV konstant

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$$

$$W_v = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$Q = -W_v$$

2.12.5 Kompression von Gas

$$W_v = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R \cdot T}{V} dV = n \cdot R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

2.12.6 Erster Hauptsatz Thermodynamik

$$Q + W = \Delta U$$

3 Mechanik in drei Dimensionen

3.1 Bewegung

Bahnen von Punkten im Verlauf der Zeit können auch mit Ortsvektoren dargestellt werden. Dabei gelten diesselben Abhängigkeiten, wie bei "Mechanik in einer Dimension".

Beispiel: Schraube:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ b \cdot \sin(\omega \cdot t) \\ c \cdot t \end{pmatrix}$$

3.1.1 Tangentenvektor

$$\vec{t}(s) = \frac{\Delta \vec{x}(s)}{\Delta s}$$

Mit Δs siehe Zusammenfassung

3.2 Impulserhaltung

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v'_i$$

3.3 Kräfte

3.3.1 Corioliskraft

$$\vec{F}_C = 2 \cdot m(\omega \times \vec{v})$$

3.4 Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

3.4.1 Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}$$

3.4.2 Starrer Rotator

$$v_i = \omega \times \vec{r}_i$$