

Messtechnik Zusammenfassung

Clemens Mittermaier

Wintersemester 2020/21

Contents

1	Was ist Messen?	4
2	Elektrotechnik	4
2.1	Der Elektrische Strom	4
2.2	Das Ohm'sche Gesetz	4
2.3	Kirchhoff	4
2.4	Bausteine	5
3	Sensor	7
4	Analoge Messung elektrischer Größen	9
4.1	Strommessung mit einem Dreheisenmesswerk	9
4.2	Tastköpfe	9
4.3	Verstärkerschaltungen	9
4.4	Spannung- und Stromgebende Sensoren	10
4.5	Ladungsgebende Senoren	11
5	Widerstandssensoren	15
5.1	Instrumentierungsverstärker	15
5.2	Trägerfrequenzmessbrücke	16
5.3	Beispiele von Widerstandssensoren	16
5.4	Andere Arten von Widerständen	16
6	Messschaltung zur Auslese von kapazitiven und induktiven Sensoren	19
6.1	Wechselspannungs-Messbrücken	20
6.2	Kapazitive Sensoren	20
6.3	Induktive Sensoren	21
7	Messschaltungen zur Auslese von Schwingenden Sesoren	22
7.1	Wiederholung	22
7.1.1	Bool'scher Algebra	23
7.1.2	Flip-Flops	25
7.2	Beispiele von Schwingenden oder Resonantnen Sensoren	25
8	Analoge Signalaufbereitung	28
8.1	Strukturen von Messeinrichtungen	28
8.2	Filter	28
8.3	der Messverstärker	28
8.4	Signale	28
8.5	Abtastung	28
8.6	Digital-Analog-Wandler	29
8.7	Analog-Digital-Wandler	30
8.7.1	Parallel (Flash) ADU	30
8.7.2	Sägezahn ADU	30
8.7.3	Zweirampen-ADU	30
8.8	Sukzessive Approximation	31
8.9	Sigma-Delta-ADU	31
8.10	Wichtiges zum Abschluss	32

9	Messabweichungen	35
9.1	Einführung	35
9.1.1	Alles was wichtig ist	35
9.1.2	Kalibrieren- Justieren- Eichen	35
9.2	Systematische Messabweichungen	36
9.2.1	Messabweichung durch Hyterese	36
9.2.2	Fortpflanzung systematischer Abweichungen	36
9.2.3	Zufällige Messabweichungen	36
10	Signalverarbeitung	43
10.1	Fourier-Transformation	43
10.2	Diskrete Fourier-Transformation	43
10.3	Anwendung der DFT	47
10.4	Fensterfunktion und Spektralanalyse	47
10.5	Fast and Furious Fourier-Transformation	51
11	Digitale Filter	52
11.1	Entwurf von FIR-Filtern	52
11.1.1	Fenstermethode	53
11.1.2	Optimalmethode	55
11.2	IIR-Filter	55
11.2.1	z-Transformation	55
11.2.2	Eigenschaften	56
11.2.3	Entwurf	56
12	Kalman Filter	57

1 Was ist Messen?

”Messen heißt vergleichen”- Eine Umweltgröße X wird durch eine Maßzahl x als Vielfaches der Einheitsgröße N zugeordnet. N wird durch ein Messnormal definiert.

$$X = x * N$$

Erste Fundamentalvoraussetzung Die zu messende Größe muss **qualitativ eindeutig definiert** und **quantitativ bestimmbar** sein.

Zweite Fundamentalvoraussetzung Das Messnormal muss durch **Konvention** festgelegt sein.

2 Elektrotechnik

2.1 Der Elektrische Strom

Jede gerichtete Bewegung von elektrischer Ladung stellt einen elektrischen Strom dar.

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} / A \quad (1)$$

I = Strom

Q = Ladung

t = Zeit

A = Querfläche des Leiters

die elektrische Spannung Das elektrostatische Potential $\varphi(\vec{r})$ ist definiert als

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} * d\vec{s} \quad (2)$$

Die elektrische Spannung U wird dann als der Unterschied der Potentiale definiert:

$$U_{AB} = \varphi(r_A) - \varphi(r_B) \quad (3)$$

Um eine Probeladung q im Feld von r_A nach r_B zu bewegen, muss die Arbeit $W_{AB} = -qU_{AB}$ aufgewendet werden.

2.2 Das Ohm'sche Gesetz

Der elektrische Widerstand ist definiert als:

$$R = \frac{U}{I} = \varphi * \frac{l}{A} \quad (4)$$

2.3 Kirchhoff

Die Kirchhoff'schen Sätze sind zur Bestimmung von Strömen und Spannungen in Stromkreisen.

1. Kirchhoff'scher Satz wird auch als Knoten- oder Hüllensatz bezeichnet. Bei einem Knoten einer Schaltung muss die Summe der Ströme die in den Knoten und aus dem Knoten hinaus fließen, gleich 0 ist.

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (5)$$

2. Kirchhoff'scher Satz Wird auch als Maschensatz bezeichnet. Alle Spannungen in einer Leiterschleife müssen aufsummiert Null ergeben.

$$\sum_{k=1}^n U_k = 0 \quad (6)$$

2.4 Bausteine

Widerstände Ein reiner Widerstand ist immer in Phase.

$$R = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U}{I} = [\Omega] \quad (7)$$

Kondensator Q = Ladungsmenge
 C = Kapazität

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d(C(t) * U(t))}{dt} = C * \frac{du(t)}{dt} \quad (8)$$

Die Phase der Spannung wird um $-\frac{\pi}{2}$ verschoben und läuft der Stromstärke hinterher.

Spule Die Phase der Stromstärke wird um $-\frac{\pi}{2}$ verschoben.

Φ = Magnetischer Fluss

L = Induktivität

mit $\Phi = L * I$

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{d(L(t) * i(t))}{dt} = L * \frac{di(t)}{dt} \quad (9)$$

Stromänderung proportional zur angelegten Spannung.

Komplexer Widerstand oder auch **Impedanz** oder **Seinwiderstand** mit:

R = Wirkwiderstand oder Resistanz

X = Blindwiderstand oder Reaktanz

$$Z = R + j * X \quad (10)$$

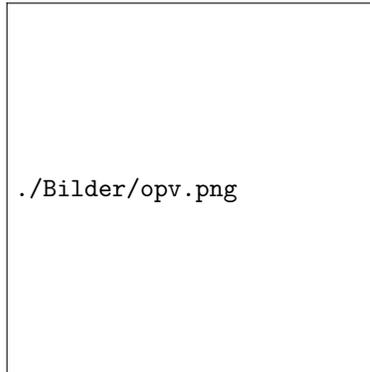


Figure 1: Operationsverstärker

Operationsverstärker ist eine integrierte Schaltung, die im wesentlichen aus zwei Eingangsklemmen, eine Ausgangsklemme und einen Anschluss für Bezugspotential hat. Bei einem OPV gelten zwei wichtige Regeln: Es fließen keine Ströme in oder aus den Eingängen eines Operationsverstärkers. und eine Operationsverstärker versucht die Eingänge immer gleich zu halten. Ein idealer Operationsverstärker hat eine unendlich große Verstärkung der Eingangsspannung.

$$U_a = V * U_d = V * (U_p - U_n) \tag{11}$$

3 Sensor

Ein Sensor ist ein Spezialfall eines **Transducers**, der eine Energieform (mechanisch, thermisch, ...) in eine andere Energieform (elektrisch, mechanisch, ...) umformt.

- Statische Eigenschaften
 - Messbereich
Bereich in dem Messgrößen sinnvoll sind.
 - Empfindlichkeit
Änderungsrate des Sensors

$$S = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\text{Einheit des Ausgangssignals}}{\text{Einheit des Eingangssignals}} \quad (12)$$

- Querempfindlichkeit
Einfluss einer fremden Größe auf den Messwert der gesuchten Größe.
z. B.: Temperatur auf den elektrischen Widerstand in einem Draht.
- Auflösung
Kleinste (messbare) Änderung der Eingangsgröße
- Messabweichung
Systematische, dynamische oder zufällige Messfehler
- Dynamische Eigenschaften
 - Übertragungsfunktion
 - Frequenzgang
 - Impulsantwort
 - Sprungantwort
- Sonstige Eigenschaften
 - Messdauer
Dauer einer Messung
 - Zuverlässigkeit
Lebensdauer
 - Platzbedarf
Größe
 - Kosten

Messkette/ Messgeräte liefert oder verkörpert (durch Normale) Messwerte. Die Messkette ist dabei eine Folge von Elementen eines Messgerätes oder einer Messeinrichtung, die den Weg des Messsignals von der Aufnahme der Messgröße bis hin zur Bereitstellung der Ausgabe bildet.

Messmethoden Bei direkten Messverfahren wird die Messgröße mit einer Norm verglichen. (Balkenwaage)
Bei indirekten Verfahren wird die Messgröße erst elektrisch umgeformt, und dann ausgewertet.
Analoge und digitale Messverfahren unterscheiden sich durch die für die Darstellung benutzten Signale. Analoge Signale stellen eindeutige Punkte auf einer Skala dar, während digitale Signale quantisiert auf einem Ziffernblatt oder auf einem Bildschirm dargestellt werden.



Figure 2: Aufbau einer Messeinrichtung

Klassifizierung von Sensoren Nach Messgröße, Herstellungsprozess, Anwendungsgebiet, Wandlungsprinzip oder den elektrischen Eigenschaften des Sensorelements.

4 Analoge Messung elektrischer Größen

4.1 Strommessung mit einem Dreheisenmesswerk

Ein Strom fließt durch eine Spule, so werden die Eisen gleichsinnig magnetisiert, und stoßen sich daher ab. Dabei gilt das elektrische Drehmoment $M_{el} = \eta(\alpha) * i_{eff}^2$ mit $\eta(\alpha)$ als dem winkelabhängigen Faktor und

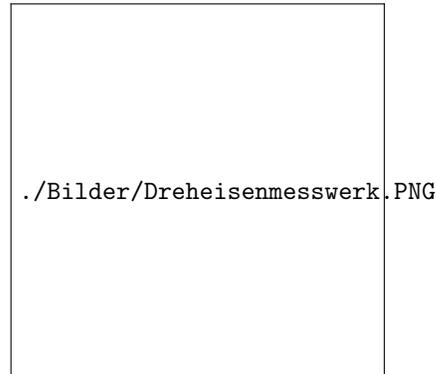


Figure 3: Aufbau eines Dreheisenmesswerks

dem Rückholmoment, also einer Feder, die gegen die abstoßende Kraft der Eisen wirkt, $M_{mech} = k * a$ mit k = Federkonstante.

Daraus folgt: $M_{el} = M_{mech}$, so dass:

$$\alpha = \eta(\alpha) + i_{eff}^2/k \quad (13)$$

α ist dabei der Ausschlagwinkel. Alternativ kann man das auch mit einer einzien Spule Machen, so dass $M_{el} = a * b * B * N * i_x$ ist mit $a * b$ der Fläche der Spule im Magnetfeld, B der Feldstärke und N die Anzahl der Windungen. i_x ist dann nur noch der Strom, der durch die Spule fließt.

$$\alpha = \frac{a * b * B * N * i_x}{k} = const * i_x \quad (14)$$

4.2 Tastköpfe

Wichtig ist nur folgende Grafik: Und die Gleichung fpr die Kapazität des Eingangs:

$$\frac{C_T * C_E^*}{(C_T + C_E^*)} \quad (15)$$

Aber alles was man wissen sollte ist, wenn $R_T C_T < R_E (C_E + C_K)$ spricht man von einer unterkompensation, wenn $R_T C_T = R_E (C_E + C_K)$ ist die Schaltung richtig kompensiert und wenn $R_T C_T > R_E (C_E + C_K)$, dann spricht man von überkompensation.

4.3 Verstärkerschaltungen

bei einem nichtinvertierenden Verstärker handelt es sich um eine **Spannungsverstärkung**. Ein invertierenden Verstärker **verstärkt den Strom**.

Ein Spannungsfolger (siehe Abbildung 6) entkopplet das Eingangssignal vom Ausgangssignal, so dass eine Last am Ausgang keine Auswirkung auf den Schaltkreis am Eingang hat.



Figure 4: Aufbau eines Tastkopfes und eines Messgerätes

4.4 Spannung- und Stromgebende Sensoren

Hall-Sensoren haben ein verändertes, elektrisches Potential, wenn sich das Magnetfeld ändert. Dadurch lassen sich viele mechanische Messungen in ein elektrisches Signal umwandeln. Abbildung 7 zeigt den Aufbau eines solchen Senders, der mit der Formel (16)

$$U_H = \frac{R_H}{d} * I * B \quad (16)$$

mit R_H = Hallkonstante, d = dicke des Halbleiters, B = magnetische Induktion, und I = eingprägter Strom.

Die Umwandlung von mechanischem Druck in elektrische Spannung erfolgt dann über die Änderung des Magnetfeldes, in dem man den Magneten bewegt.

Elektrodynamische Sensoren Auch hier werden Magneten in einer Spule bewegt, und so die Induktivität der Spule beeinflusst. Dabei gibt es verschiedene Arten von Anordnungen:



Figure 5: Verstärkerschaltungen

4.5 Ladungsgebende Sensoren

piezoelektrischer Aufnehmer Durch Verformung eines Kristalls wird eine Spannung erzeugt, die gemessen werden kann.

$$u_a(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (17)$$

optische Effekte Photodioden, etc.

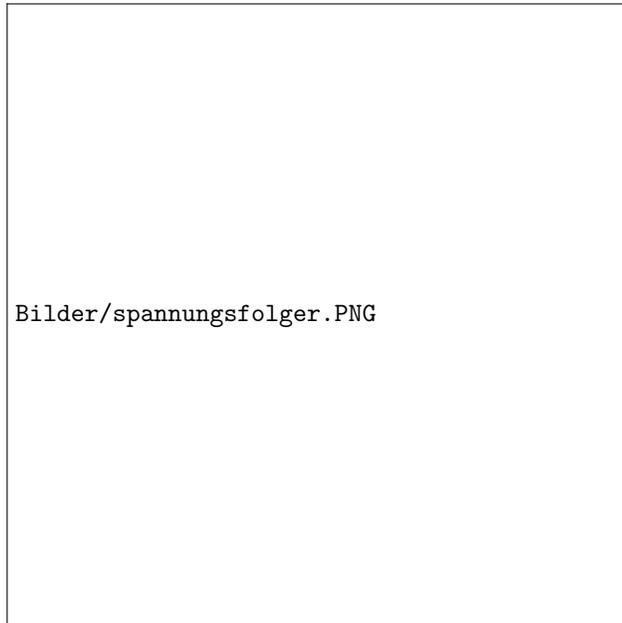


Figure 6: Spannungsfolger



Figure 7: Hall-Sensor Schema

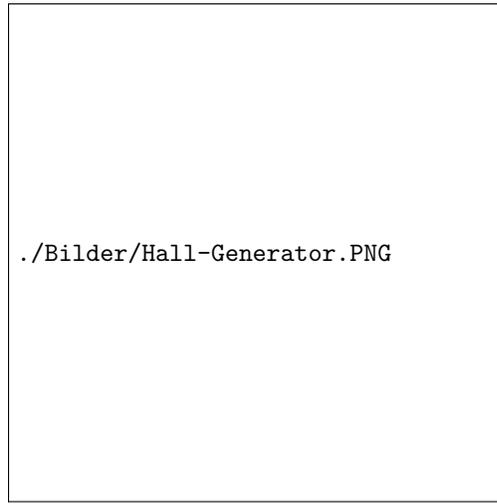


Figure 8: Hall-Generator

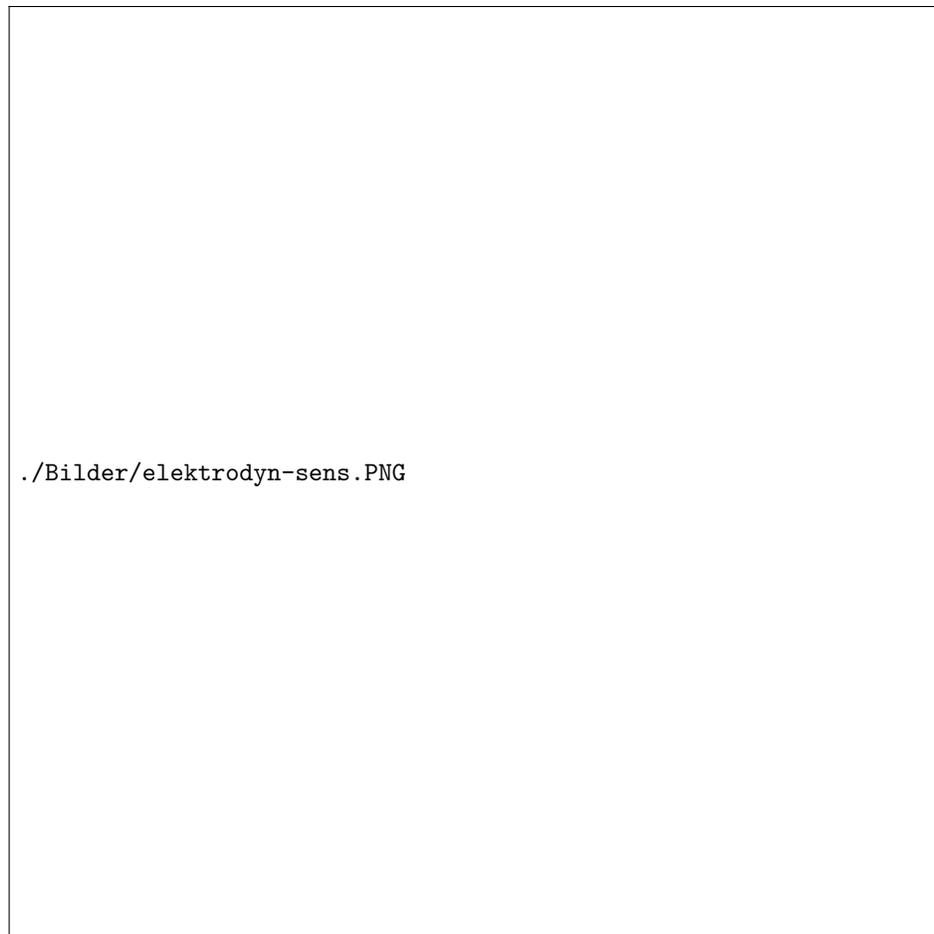


Figure 9: Anordnung verschiedener Magneten zu einer Spule

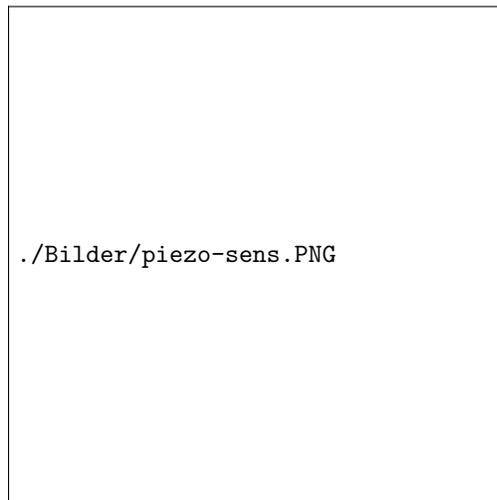


Figure 10: Aufbau eines Piezo-effektiven Sensoren

5 Widerstandssensoren

Der Widerstand eines Leiters ist definiert als:

$$R = \frac{\rho * L}{A} \quad (18)$$

mit ρ = spezifischer Widerstand (Materialabhängig), L = Länge des Leiters und A = Fläche des Leiters. Die einfachste Anordnung einer Messbrücke ist ein Spannungsteiler.

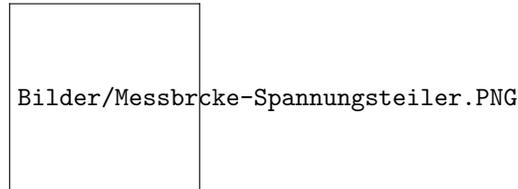


Figure 11: Spannungsteiler als Messbrücke

U_{out} ist gegeben durch

$$U_{out} = U_{in} * \frac{R_x}{R_x + R_1} \quad (19)$$

Eine deutlich bessere, weil deutlich genauer, Messbrücke ist die Wheatstonesche Messbrücke. Die Idee einer Wheatstoneschen Messbrücke ist, dass die Spannung $U_{out} = 0V$ ist, und damit Veränderungen in den darumherum liegenden Impedanzen präziser zu messen sind. Die Formel dafür ist:

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3} \quad (20)$$

Die Formel lautet dann:

$$U_{out} = U_{in} * \left[\frac{R_3}{R_2 + R_3} - \frac{R_4}{R_4 + R_1} \right] \quad (21)$$

Meist ist ein Widerstand ein Potentiometer um die Messbrücke richtig justieren zu können. Ziel des ganzen ist, einen Testwiderstand $R_3 = R_x$ zu messen, indem man mit R_4 einen Widerstand eingestellt, damit $U_{out} = 0$ ist.

5.1 Instrumentierungsverstärker

In Abbildung 13 wird eine Schaltung gezeigt, die den Spannungsunterschied zwischen U_1 und U_2 ausgibt. Dabei sind $OV1$ und $OV2$ nur als nichtinvertierende Spannungsfolger geschaltet und $OV3$ liefert nach Formel 22 die Ausgangsspannung U_a .

$$U_a = \frac{R_2}{R_1}(U_2 - U_1) \quad (22)$$

Subtrahierer ist die bereits in Abbildung 13 benutzte Ausgangsstufe. Wichtig ist dabei die hohe Eingangsimpedanz zu beachten. Die Formel für U_A ist dabei:

$$U_A = \frac{(1 + \frac{R_2}{R_1})}{(1 + \frac{R_3}{R_4})} U_1 - \frac{R_2}{R_1} U_2 \quad (23)$$

für $R_1 = R_3$ und $R_2 = R_4$ gilt: $U_A = \frac{R_2}{R_1}(U_1 - U_2)$



Figure 12: Aufbau einer Wheatstone'schen Messbrücke

5.2 Trägerfrequenzmessbrücke

für sehr genaue Messungen kann die Wheatstonesche Messbrücke über einen Wechselspannungsverstärker gemessen werden. Über einen Filter lässt sich die Wechselspannung im Nachhinein herausfiltern. Dabei verhindert man Driften durch Temperatur oder Rauschen bei $f = 0$!

Dabei wird mit einer Sinusschwingung eine Wechselspannung erzeugt, die erstmal nur die Änderung in den Signalen misst, jedoch kann dann mit einem hochfrequenten Demodulator aus der Sinusspannung wieder das ursprüngliche Signal gewonnen werden.

5.3 Beispiele von Widerstandssensoren

Thermoresistoren sind Leiter, die ihren Widerstand mit ändernder Temperatur auch ändern. Da die Elektronenbeweglichkeit in einem Leiter temperaturabhängig ist lässt sich das nutzen. Dabei gilt bei Metallen $\rho = \rho_G + \rho_p(T)$. Dabei kann man den elektrischen Widerstand auch über Taylorreihen annähern. α und β sind dabei der lineare und quadratische Widerstandskoeffizient.

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \dots] \quad (24)$$

Meist reicht allerdings eine lineare Näherung. Aus dieser Näherung lässt sich auch die Sensitivität ableiten, mit $S = \frac{dR(\vartheta)}{d\vartheta} = R_0 * \alpha$.

Es gibt verschiedene Arten von Widerstandsthermometern, die hier präsentierten sind Metallwiderstandsthermometer. Sie haben einen großen Temperaturbereich, eine gute Langzeitstabilität, haben aber ein Problem mit Wärmeableitung.

5.4 Andere Arten von Widerständen

Es gibt natürlich auch noch viele andere Varianten von Widerstandssensoren, die also ihren inneren Widerstand aufgrund äußerlicher Einwirkungen ändern.

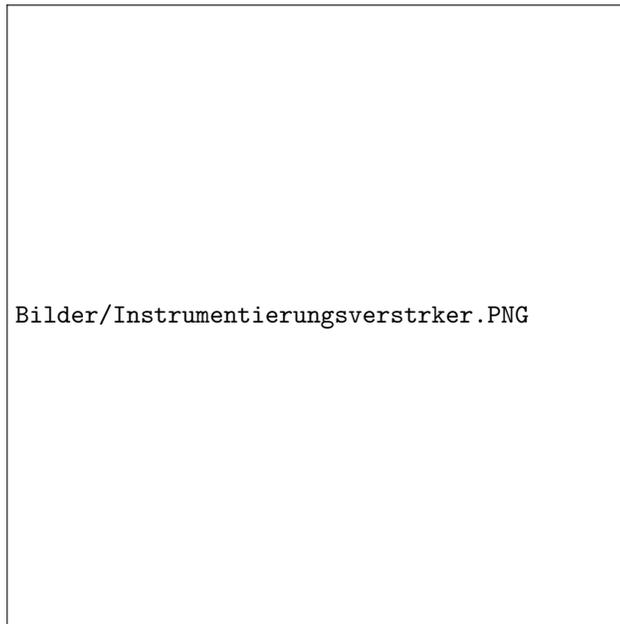


Figure 13: Verstärkerschaltung für die Differenz der Spannungen U_1 und U_2

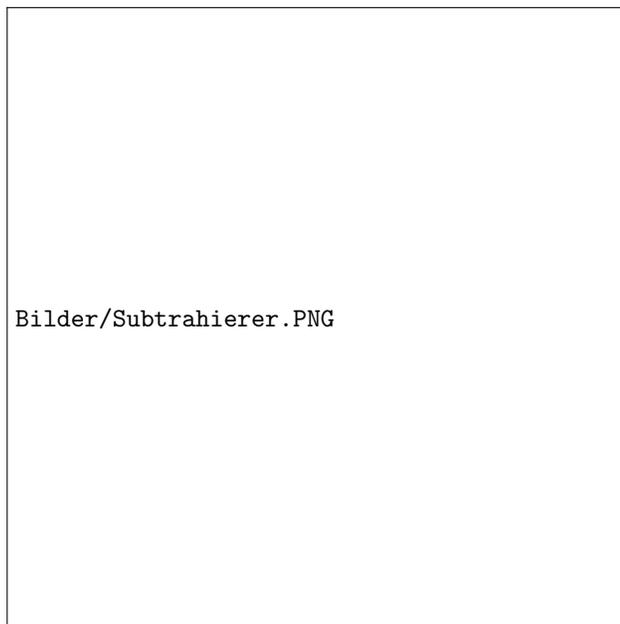


Figure 14: Schaltung eines Subtrahierers

Photowiderstände erhöhen mit Lichteinstrahlung ihre Trägerdichte und verbessern dadurch ihre Leitfähigkeit.

Elementare optische Sensoren Sind niedrig dotierte Verbindungshalbleiter. Sie haben einen Dunkelwiderstand, also wenn nicht beleuchtet, im $M\Omega$ -Bereich. Bei einer Beleuchtung werden zusätzliche Ladungsträger

generiert, und der Widerstand sinkt.

Magnetische Effekte sind Galvanomagnetische Effekte in Halbleitern. Sie werden auch als **Hall-** und **Gauss-Effekt** bezeichnet. Der Gauss-Effekt hat den selben Ursprung wie der Hall-Effekt, mit dem Unterschied, dass er die zusätzliche Widerstandsänderung, die durch die Ablenkung der Stromdichtevektoren bei einer magnetischen Induktion entsteht. Beide Effekte sind geeignet um zeitlich konstante Magnetfelder zu messen und zu detektieren.

Widerstandensensoren zur Längen- und Winkelmessung Der elektrische Widerstand R ist abhängig von der Leiterlänge l , dem Leiterquerschnitt A und dem spezifischen Widerstand des Leiters ρ . Beispiel für eine solche Messeinheit ist das Potenziometer. Bei einem Dehnmessstreifen mit Konstanten-Mäander kann es durch Verschiebung der Länge zu einer Verschiebung des Widerstandes kommen. Verwendet man anstelle eines metallischen Leiters einen Halbleiter, so wird auch der Widerstand von Silizium von seiner Dehnung und Streckung beeinflusst. Der Effekt wird auch als **Piezoresistiv** bezeichnet.

6 Messschaltung zur Auslese von kapazitiven und induktiven Sensoren

Zuerst diese wichtige und interessante Grafik:

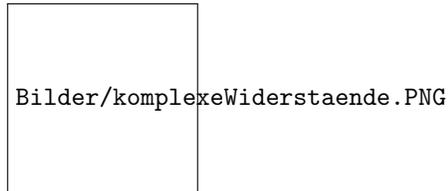


Figure 15: Tabelle komplexer Widerstände und ihre Formeln

Es gibt Schein-, Wirk- und Blindwiderstand. Dabei gilt *Schweinwiderstand* = $\frac{\text{Wirkwiderstand}}{\text{Blindwiderstand}}$. Näher möchte ich hier auch nicht drauf eingehen, denn eigentlich sollte das schon in Elektrotechnik behandelt worden sein.

Um eine kontinuierliche Messung durchzuführen benutzt man wieder eine Messbrücke mit einem bekannten komplexen Widerstand.

Strom-Spannung-Wandler tut, was der Name sagt. Am Anschluss C_s in Abbildung 16 wird ein Strom gemessen, der die Kapazität der Kondensators ändert.

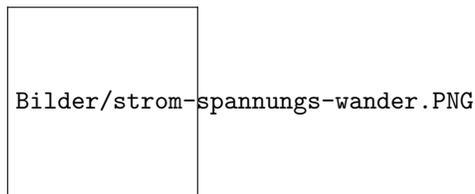


Figure 16: Schaltung eines Strom-Spannungs-Wandlers

Die Formel für die Ausgangsspannung u_A ist dann:

$$u_a = \frac{\delta C_s}{\delta t} \quad (25)$$

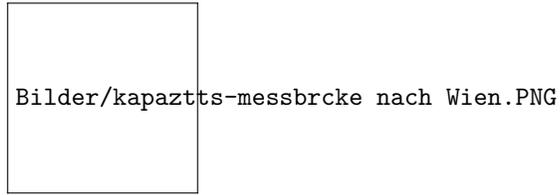


Figure 17: Kapazitäts-Messbrücke nach Wien

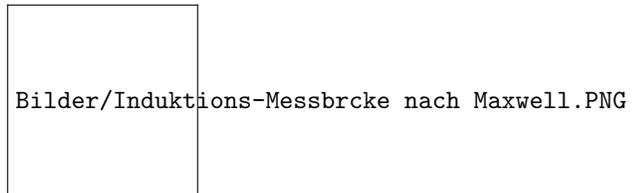


Figure 18: Induktions-Messbrücke nach Maxwell

6.1 Wechselspannungs-Messbrücken

Bei einer Wechselspannungs-Messbrücke werden die Widerstände durch komplexe Impedanzen ersetzt. Die Formel 20 bleibt also gleich. Im folgenden werde ich ein paar Messbrücken zeigen, sie aber nicht weiter erläutern. Die Formeln sind im vollständigen Foliensatz auf Folie 251. Diese sind in den Abbildungen 17, 18 und 19 abgebildet.

Phasenschieber-Brücke wird dafür verwendet um die Phase einer Spannung zu verändern.

6.2 Kapazitive Sensoren

Folgende Formel ist wichtig:

$$C = \frac{\epsilon_0 * \epsilon_r * A}{d} \quad (26)$$

Dabei ist A die Fläche der Platten, ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante, und ϵ_r die (vom zwischen den Platten liegenden Material abhängige) spezifische Dielektrizitätskonstante. Und d ist der Abstand der Platten.

Praktische Anwendung Beispielsweise in Differential-Kondensatoren, bei denen sich eine Kondensator-Platte zwischen zwei (verschiedenen) Kondensatoren liegt und somit das Gegenstück bildet. Wenn sich die erste nun bewegt, verändert sich die Kapazität der Kondensatoren. In einem nimmt die Ladung zu, im anderen ab. Das kann dann zur Messung der Positionsänderung genutzt werden.

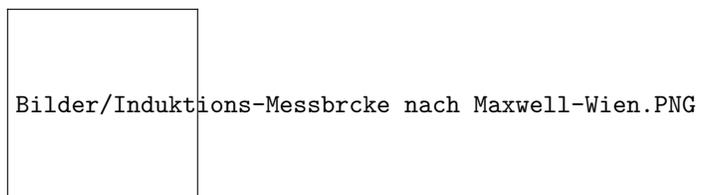


Figure 19: Induktions-Messbrücke nach Maxwell-Wien

6.3 Induktive Sensoren

$$L = \mu_0 * \mu_r * n^2 * \frac{A}{l} \quad (27)$$

μ_0 ist die magnetische Feldkonstante, μ_r ist die Permeabilitätszahl, n ist die Anzahl der Windungen, A die Querschnittsfläche der Spule und l die Länge der Spule.

7 Messschaltungen zur Auslese von Schwingenden Sensoren

7.1 Wiederholung

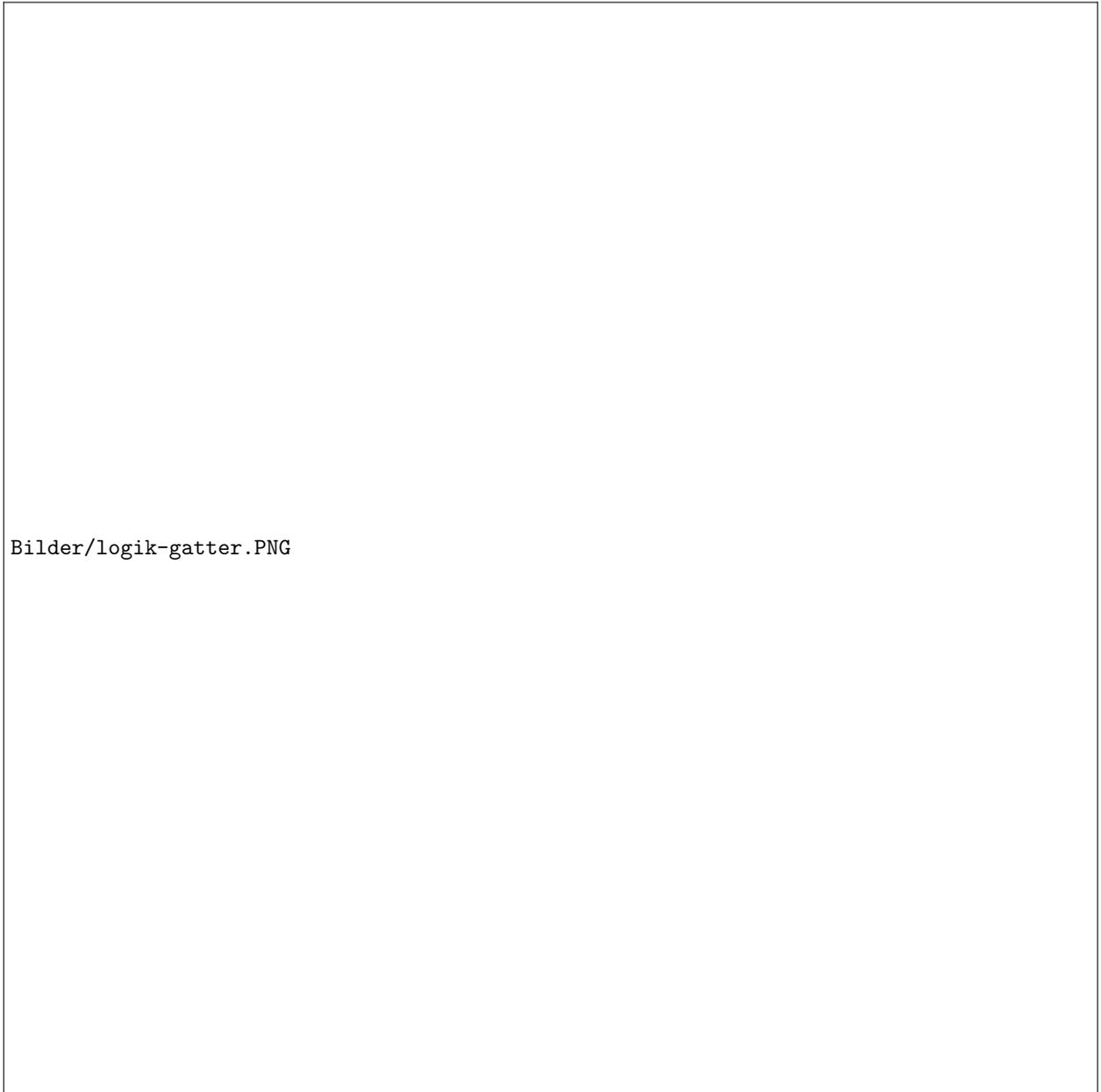


Figure 20: Alle Logik-Gatter

In Abbildung 20 sind nun erstmal alle Logik-Gatter mit ihren Wahrheitstabellen und Formeln. Weiter geht es nun mit

7.1.1 Bool'scher Algebra

$$0 + 0 = 0 \quad (28)$$

$$0 + 1 = 1 \quad (29)$$

$$1 + 0 = 1 \quad (30)$$

$$1 + 1 = 0 + 1 \quad (31)$$

Operationen mit 0 und 1:

$$x_1 + 1 = 1 \quad (32)$$

$$x_1 + 0 = x_1 \quad (33)$$

$$x_1 * 1 = x_1 \quad (34)$$

$$x_1 * 0 = 0 \quad (35)$$

$$(36)$$

Tautologie

$$x_1 + x_1 = x_1 \quad (37)$$

$$x_1 * x_1 = x_1 \quad (38)$$

Operationen mit negierten Variablen

$$x_1 + \overline{x_1} = 1 \quad (39)$$

$$x_1 * \overline{x_1} = 0 \quad (40)$$

Kommutativgesetz

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \quad (41)$$

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1 \quad (42)$$

Distributivgesetz

$$x_1 + x_2 * x_3 = (x_1 + x_2) * (x_1 + x_3) \quad (43)$$

$$x_1 * x_2 + x_3 = x_1 * x_2 + x_1 * x_3 \quad (44)$$

Assoziativgesetz

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \quad (45)$$

$$x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3 \quad (46)$$

de Morgan'sche Gesetze

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} * \overline{x_2} \quad (47)$$

$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} * \overline{x_2}} \quad (48)$$

$$\overline{x_1 * x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2} \quad (49)$$

$$x_1 * x_2 = \overline{\overline{x_1} + \overline{x_2}} \quad (50)$$

Absorptionsgesetz

$$x_1 + x_1 * x_2 = x_1 \quad (51)$$

$$x_1 + \overline{x_1} * x_2 = x_1 + x_2 \quad (52)$$

$$x_1 * x_2 + x_1 * \overline{x_2} = x_1 \quad (53)$$

$$x_1 * (x_1 + x_2) = x_1 \quad (54)$$

$$x_1 * (\overline{x_1} + x_2) = x_1 * x_2 \quad (55)$$

$$(x_1 + x_2) * (x_1 + \overline{x_2}) = x_1 \quad (56)$$

7.1.2 Flip-Flops

Im Folgenden Abschnitt werden einige Flip-Flops präsentiert. Die sollten aus TI bekannt sein.



Figure 21: Schaltung eines RS-Flip-Flops

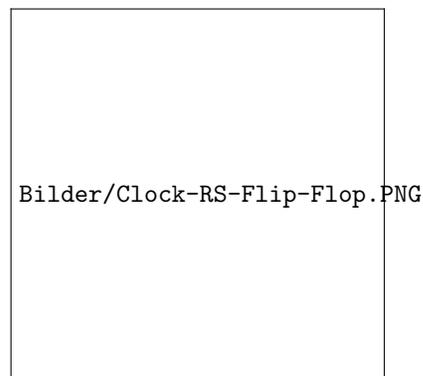


Figure 22: RS-Flip-Flop mit Clock

7.2 Beispiele von Schwingenden oder Resonanten Sensoren

Durchflussmesser mit Messflügel-Zählern sind Wasserräder, deren Umdrehungszahl gemessen werden kann.

Coriolis-Massenstrommessung misst den Einfluss der Coriolis-Kraft auf eine Masse. Damit können Flüssigkeiten in Rohren gemessen werden. Mehr im Foliensatz auf Folie 314.

inkrementale Wegmessung ein Raster wandert über einen mechanischen oder optischen Abtaster, der an einen Zähler angeschlossen ist. Dabei gibt es zwei Arten von Encodern. Lineare, also ein Zaun, und Winkelencoder eine Drehscheibe mit Löchern. Dabei wird das Encoder-Prinzip verwendet. Das bedeutet, dass die Inkrementierung früher mechanisch durchgeführt wurde. Heutzutage wird das induktiv, kapazitiv, magnetisch oder optisch registriert. Um Richtungen oder andere Werte zu bestimmen benötigt man allerdings mehr Sensoren.

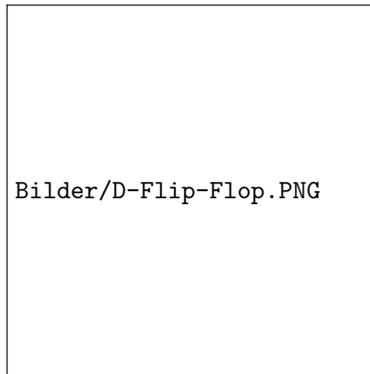


Figure 23: D-Flip-Flop als einfache Speicher Zelle

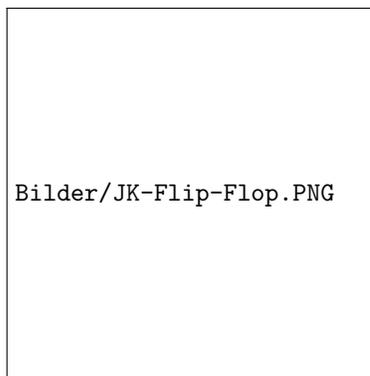


Figure 24: JK-Flip-Flop verhindert ie Belegung $R=S=1$

Auflösungsverbesserung Die Auflösung ist dabei durch das Raster bestimmt. Um die Auflösung doch noch zu verfeinern kann der sog. Moiré-Effekt genutzt werden. Damit kann die Auflösung um den Faktor 100 verbessert werden.

Absolute Wegmessung Kodiert in seinem ablesen bereits die vor beginn der Messung zurück gelegte Streck. Also etwa per Gray-Code. Auch hierfür werden wieder mehrere Messpunkte benötigt.



Bilder/absoluteAbstandsmessung.PNG

Figure 25: Beispiel einer Codierung

8 Analoge Signalaufbereitung

Zu erst möchte ich darauf hinweisen, dass die Folien 338-374 eine umfassende Zusammenfassung der Vorlesung Systemtheorie und Regeltechnik ist. Auf diesen Inhalt wird hier nicht näher eingegangen. Schau die Vorlesung.

8.1 Strukturen von Messeinrichtungen

Es gibt dabei drei verschiedene Formen: die Ketten-, Parallel- und Kreisstruktur, welche dem Regelkreis der Regeltechnik entsprechen.

Kettenstruktur ist die einfache hintereinander Schaltung von mehreren Systemen. Das Problem dabei ist, dass sich Fehler fortpflanzen. Das lässt sich auch mathematisch über die Faltung von Frequenzraum in den Phasenraum mit einer Laplace-Transformation beweisen, aber man kann das einfach auf Folie 380 nachlesen.

Parallelstruktur wird zur Gleichtakt unterdrückung verwendet, und ist quasi eine Addition oder Subtraktion von Signalen.

Kreisstruktur ist der aus der Regeltechnik bekannte Regelkreis. Sie ist dabei sehr präzise, aber kann zu Instabilität führen. Wer Rechenbeispiele will, kann sich die Folien 385 ff ansehen.

8.2 Filter

8.3 der Messverstärker

Der Messverstärker verstärkt das Messsignal. Da die zu messenden Ströme und Spannung sehr niedrig sein können ist das trotzdem eine gute Idee. Darüber hinaus hat so eine, auf OPV basierende Schaltung noch andere Vorteile. Durch den OPV wird der Messkreislauf nicht belastet. Es ermöglicht ein hohes Auflösungsvermögen.

8.4 Signale

Definition Eine physikalische Größe, in deren Wert und Verlauf (meist Zeitverlauf) Informationen verschlüsselt sind, nennt man ein Signal.

Wert und Verlauf können kontinuierlich oder diskontinuierlich (diskret, bzw schrittweise) sein.

Zeitkontinuierliche Signale sind Signale, die immer zur Verfügung stehen. Also kontinuierliche, analoge Signale oder die daraus digitalisierten Signale.

Zeitdiskrete Signale sind Signale, die nur zu bestimmten Zeitpunkten zur Verfügung stehen. Das Abtast-Signal ist dabei wertkontinuierlich, wird aber in einem bestimmten Intervall gemessen. Die andere Form des zeitdiskreten Signals ist das Digitale Signal, welches gewisse Zeitabstände zur Synthetisierung braucht. Digitale Signale haben viele Vorteile, von besseren Eigenschaften in der Übertragung, hin zur Speicherung und Verarbeitung.

8.5 Abtastung

oder Analog-Digital-Umsetzer. Wichtig!! kommt in der Klausur dran.

Der Prozess passiert in 4 Schritten: Anti-Aliasing, Abtastung, Quantisierung und zu letzt Codierung.

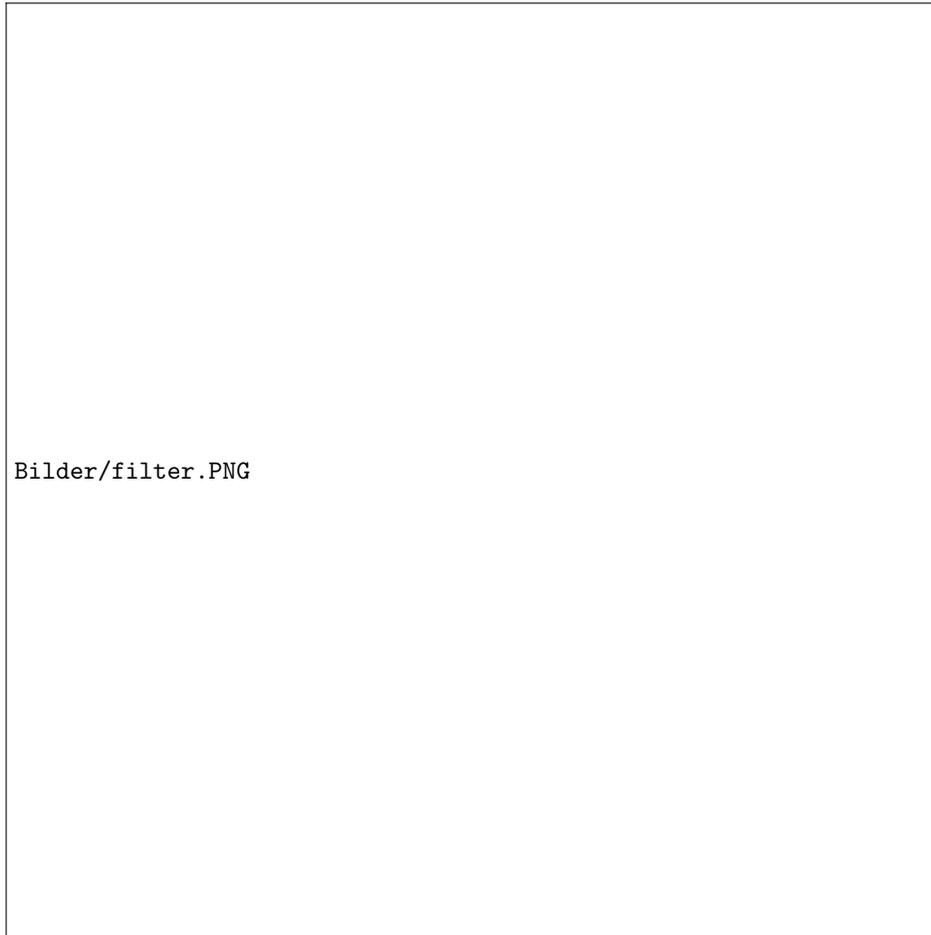


Figure 26: Arten von Filtern

Abtastung Sample Hold ist eine Variante, die eine bestimmte Spannung aus dem analogen Eingangssignal nimmt und in einem Kondensator speichert, so lange, bis die Spannung in einen digitalen Wert umgewandelt werden kann.

Ein Problem das dabei auftreten kann ist das sog. Aliasing. Das tritt auf, wenn die Abtastrate nicht eine deutlich höhere Frequenz hat, als das zu messende Signal. Es gilt dabei das Abtasttheorem.

$$f_s > 2f_{max} \quad (57)$$

Eine Faustregel ist, dass die Abtastrate mindestens doppelt so schnell sein muss.

Quantisierung Die Umsetzung eines zeitdiskreten signals in einen digitalen Wert. Das Digital Signal hat einen begrenzten Wertevorrat, also bei 8bit- 256 Werte. Die Differenz zwischen dem digitalen Signal und dem analogen wird als Quantifizierungsfehler bezeichnet.

8.6 Digital-Analog-Wandler

Um ein digitales Signal wieder in ein analoges umzuwandeln wird sich eines Summierers mit OPV bedient.



Figure 27: Schaltung eines Digital-Analog-Wandlers

Alternativ kann man auch einen RC-Tiefpassfilter benutzen, und nduch die länge der Pulsfolgen den Kondensator so auf- und entladen, so dass das gewünschte Ausgangssignal entsteht.

8.7 Analog-Digital-Wandler

Tauchen wir ein in die wunderbare Welt der Analog-Digital-Wandler. Es gibt viel zu entdecken, viel zu verstehen und ein bisschen was davon kommt auch in der nächsten Klausur dran.

8.7.1 Parallel (Flash) ADU

Die Eingangsspannung wird über mehrere Spannungsteiler geschickt, verglichen und schließlich schalten Schmitt-Trigger odre RS-Flip-Flops, so dass der Wert ausgelesen werden kann.

8.7.2 Sägezahn ADU

Diese ADU funktioniert auf dem Prinzip, dass eine Sägezahn funktion so lange ansteigt, bis sie den gleichen Wert wie die Messspannung hat. Während des Anstiegsvorgangs der Sägezahnspannung läuft ein Taktgeber und eine Zählinheit, die mit Zählen aufhört, so bald sich die Spannungen angeglichen haben. Je höher die gezählte Zahl desto höher auch die Messspannung.

Nachteil an der Schaltung ist die dauer der Abtastung und die sehr genaue Linearität der Sägezahnfunktion.

8.7.3 Zweirampen-ADU

Die Zweirampen ADU hat den Vorteil, dass sie unempfindlich gegenüber Drift und Rauschen ist. Sie braucht aber trotzdem sehr lange.

Funktionsweise: Die Messspannung U_x lädt in einer bestimmten Zeit den Kondensator C auf. Je höher die



Figure 28: Aufbau einer Flash ADU

spannung, desto mehr wird der Kondensator geladen. Nach einer vorher bestimmten Zeit wird ein Schalter umgelegt und der Kondensator ist an eine neue, bekannte und fixe Spannungsquelle angeschlossen, was ihn dazu bringt sich wieder zu entladen, jedoch mit einer bestimmten Rate, die bekannt ist. Während sich der Kondensator entlädt läuft wieder ein Zähler und zählt die Zeit, die vergeht, bis der Kondensator entladen ist.

8.8 Sukzessive Approximation

Siehe TI

8.9 Sigma-Delta-ADU

Bei dieser Art der Umwandlung wird aus dem analogen Signal mit Hilfe eines Integrators abgetastet. Dabei entsteht ein digitales Signal, mit dessen Hilfe sich das analoge Signal wieder herstellen lässt. Mit Hilfe des Integrators wird das Eingangssignal approximiert. Wenn das analoge Signal ansteigt, dann registriert das der Quantisierer, und gibt eine 1 aus. Der Integrator erhöht dann die Spannung und diese wird dann wieder mit der Eingangsspannung verglichen. Wenn die Spannung immer noch höher ist, bleibt der Output des Quantisierers gleich, sollte die Spannung geringer sein, dann gibt er eine logische 0 aus und der Integrator verringert seine Ausgangsspannung. Dadurch entsteht ein digitales Signal, welches eine 1 hat wenn die Eingangsspannung zunimmt und eine 0, wenn sie abnimmt. Dieser Umwandler hat ein paar Vorteile. Zum einen lässt sich mit einem digitalen Tiefpassfilter das Quantisierungsrauschen herausfiltern, zum anderen kann man aus einer langen Reihe von Abtastungen sehr einfach einen Binär oder dezimalen Wert errechnen. $ausgang = \frac{Addition\ der\ Binärzahlen}{Anzahl\ der\ Messungen}$ Der Fachbegriff für den Mittelwert ist die Übertastung. Also lieber 16 mal so oft abtasten und dann dafür eine 4-stellige Binärzahl haben als seltenes und dafür nur einen Abtastpunkt.

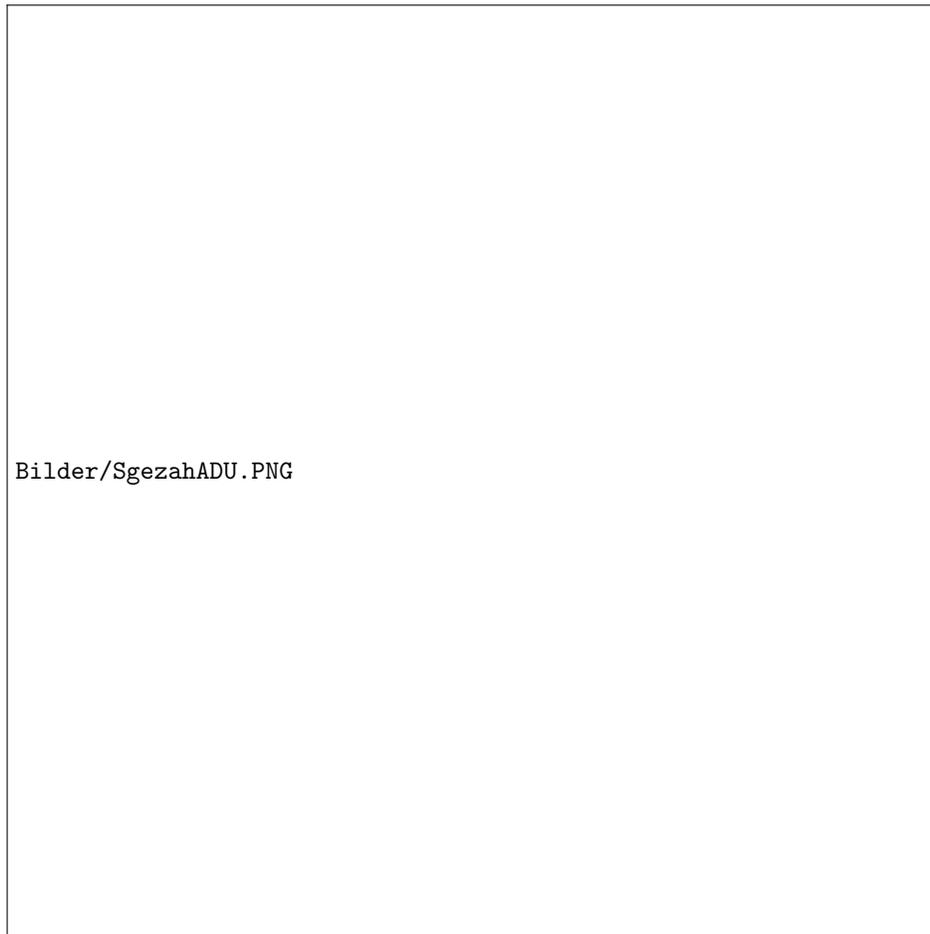
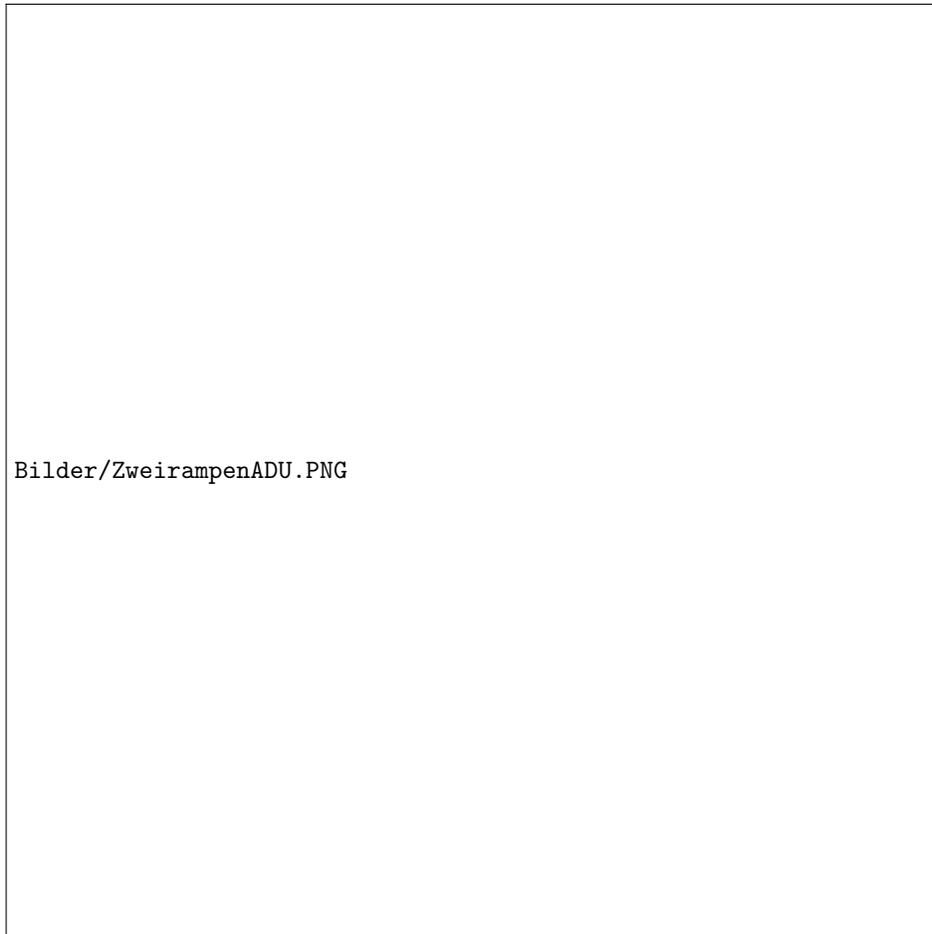


Figure 29: Aufbau einer Sägezahn ADU

8.10 Wichtiges zum Abschluss

- Auflösung: Zahl der Amplitudenintervalle der Quantisierungsstufe
- Maximale Abtastfrequenz: Max. Konversionen/ Sekunde
- Aperturzeit: Dauer des Erfassungsvorganges
- Konversionszeit: Dauer des Digitalisierungsvorganges
- Aperturjitter: Unsicherheit der zeitlichen Erfassung.



Bilder/ZweirampenADU.PNG

Figure 30: Aufbau eines Zweirampen ADU



Figure 31: Aufbau eines Sigma-Delta-ADU

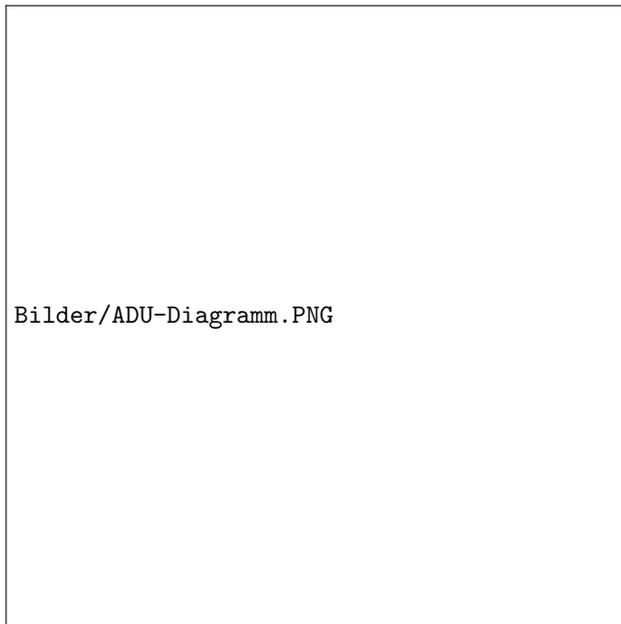


Figure 32: Analog-Digital-Umwandler im Überblick

9 Messabweichungen

9.1 Einführung

9.1.1 Alles was wichtig ist

Jede Messung ist unpräzise. Um das mathematisch abzubilden wird die Formel 1 erweitert. $X = x * N \pm U$. X ist die Messgröße, x die Maßzahl, N die Einheit und U entsprechend die Messabweichung. Es geht nun darum die Messabweichung so gering wie möglich zu halten. Dabei ist wichtig, dass das Messgerät keinen Einfluss auf die Messung hat, da das Ergebnis verfälscht werden kann.

- **Messwert**
Resultat einer einzelnen Messung bestehend aus Zahlenwert und Einheit.
- **Messgröße**
Physikalische Größe, die Ziel der Messung ist.
- **Wahrer Wert**
Ideeller Wert, der der Messgröße zugeordnet wird. Ist nicht feststellbar und lässt sich nur näherungsweise bestimmen.
- **Richtiger Wert**
Der beste verfügbare Schätzwert für den wahren Wert.
- **Messergebnis**
Schätzung des wahren Werts und Schätzung der Unsicherheit dieses Schätzwertes.

Es gibt zwei Arten von Messmethoden: Ausschlag und Kompensation.

Ausschlagmethode Hier wird, über eine Zwischengröße, die Messgröße umgewandelt. Beispiel sind die Messgeräte die in der Physik verwendet werden, um den Stromfluss oder die Spannung zu messen. (In der Schule... Die waren riesig)

Kompensationsmethode Messgerät erzeugt eine Kompensationsgröße, die von der Messgröße subtrahiert wird und so das Messgerät wieder in den Ausgangszustand (meist Null) zurückbringt. Zu Messabweichungen gibt es ein übersichtliches Diagramm.

9.1.2 Kalibrieren- Justieren- Eichen

Kalibrieren ist das bestimmen der Messabweichung des Messgerätes an einer oder mehreren Stellen im Messbereich. Vergleich mit kalibrierten Messteilen oder mit kalibrierten Messgeräten einer höheren Genauigkeitsklasse.

Justieren ist der Eingriff in das Messgerät mit dem Ziel, Messabweichungen zu verkleinern.

Eichen ist die amtliche Prüfung von Messgeräten durch akkreditierte Personen.

Rückführbarkeit ist die Eigenschaft eines Messergebnisses oder der Wertes eines Normals, durch eine ununterbrochene Kette von Vergleichsmessungen mit angegebenen Messunsicherheiten auf geeignete Normale, im allgemeinen internationale oder nationale Normale, bezogen zu sein.



Figure 33: Alle möglichen Messfehler

9.2 Systematische Messabweichungen

Wenn die Ursache eines Fehlers bekannt ist, lässt sich der Fehler raus rechnen.

$$x_w = x - \Delta x = x * \left(1 - \frac{\Delta x}{x}\right) \quad (58)$$

9.2.1 Messabweichung durch Hysterese

Die Messabweichung entsteht, wenn man nicht weiß, wie sich die Messgröße einstellt.

9.2.2 Fortpflanzung systematischer Abweichungen

Messergebnis kann als Funktion $y = f(x_1, \dots, x_n, \dots, x_m)$ dargestellt werden. Dabei ist m die Anzahl der Messungen. Wichtig ist auch zu wissen, dass die Maximale Unsicherheit der Gradient der von y ist. (siehe Folie 497)

Das entscheidende ist, dass sich der Maximale Fehler über mehrere Messungen fortsetzen kann.

- Addition und Subtraktion von Messgrößen - i absolute Fehler werden addiert/subtrahiert.
($\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots$)
- Multiplikation und Division von Messgrößen - i relative Fehler werden addiert/subtrahiert.
($\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \dots$)

9.2.3 Zufällige Messabweichungen

Zufällige Messabweichungen sind durch **nicht** erfassbare und **nicht** beeinflussbare Änderungen der Messgeräte, des Beobachteten und der Umwelt. Man kennt weder Betrag noch Vorzeichen der Abweichung.



Figure 34: Präzise und genaue Messungen

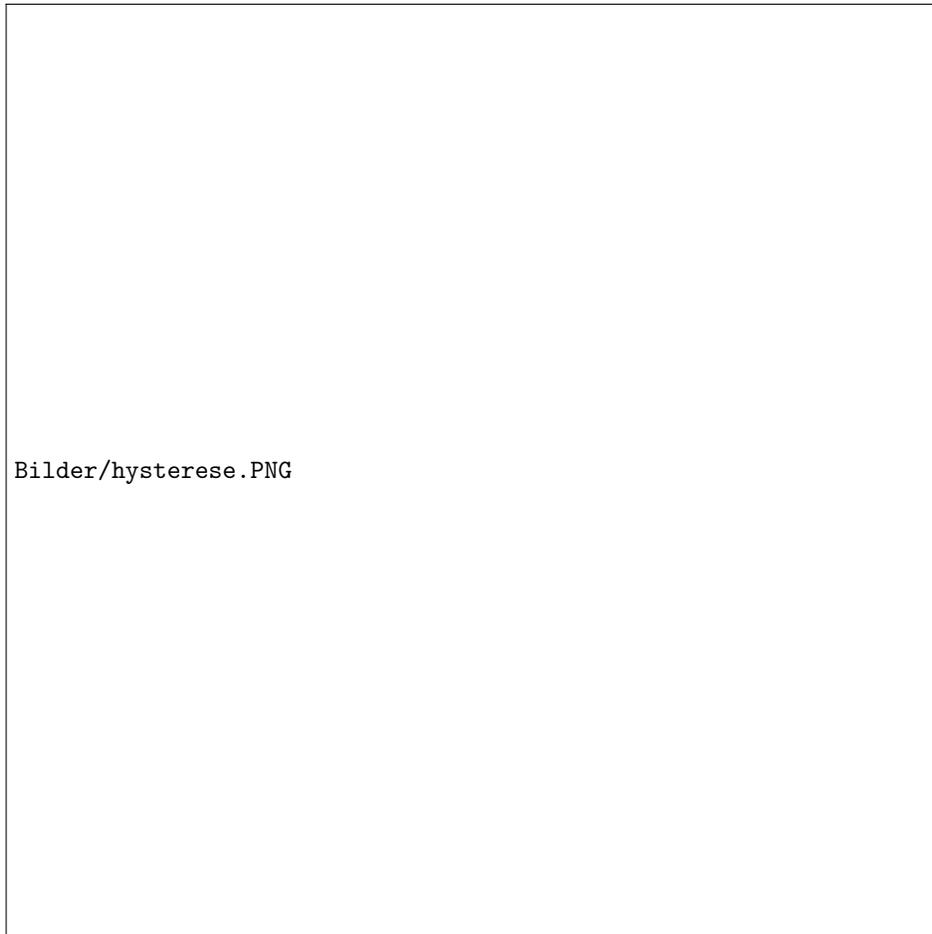


Figure 35: Fehler in der Hyterese

$y = S*x$ ist der ideale Messwert, wohingegen $y = S*x+n(t)$ mit $n(t)$ als Funktion des Fehlers. Zufällige Messabweichungen haben einen statistischen Charakter. Deshalb werden Messungen in Intervallen angegeben, in denen sich mit hoher Wahrscheinlichkeit der wahre Wert befindet.

Stochastische Eigenheiten schwanken in ihren Signalwerten zufällig. Sie können also nur mit der Statistik beschrieben werden. Ein stationär, stochastisches Signal ist, wenn die betrachteten statistischen Messgrößen sich nicht mit der Zeit verändern. Ergodisch sind stationäre, stochastische Signale, wenn die betrachteten statistischen Messgrößen nicht vom speziellen Gruppenmitglied abhängt. Beispielsweise macht es keinen Unterschied ob man einen Würfel 100 Mal wirft, oder 100 Würfel ein Mal.

In der Welt der Stochastik gibt es ein paar Begriffe, die ich hier kurz klären will:

Grundgesamtheit ist die Menge aller potentiellen Untersuchungsobjekte für eine bestimmte Fragestellung. Und Stichproben sind eine Teilmenge der Grundgesamtheit, die im besten Fall **statistisch Repräsentativ** ist. Ein weiterer Fachbegriff ist die **deskriptive Statistik**. Sie ist die Abbildung von bestimmten Merkmalen eines Datenstazes, auf einzelne Kennwerte. Durch Berechnung dieser Kennwerte werden komplexe Daten mit einer kleinen Anzahl von Kennwerten beschrieben. Wichtige Kennzahlen sind dabei: Mittelwert, Varianz, Standardabweichung, Variationskoeffizient, Modalwert, Median, 1. Quartil, 3. Quartil, Quartilsdifferenz.

Um zusammenfassende Statistiken übersichtlich darzustellen, werden **Histogramme** benutzt. Ein normalisierte Histogramm wird als **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** bezeichnet. Meist dargestellt durch ein Balkendiagramm. Vorteile sind vor allem ein guter Überblick. Man sieht auf einen Blick den Höchstwert, die Verteilungsform und Ausreißer. Nachteile liegen vor allem in der Vergleichbarkeit mit anderen Datensätze. So bald es sich um absolute Zahlensätze mit unterschiedlichen Maximalwerten wird ein Vergleich schwierig. Für Vergleiche wird auf die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion verwiesen, die die relative Verteilung anzeigt. Dass sich ein Messwert im Intervall $x_1 < x < x_2$ befindet (siehe Abbildung 36) lässt sich über das Integral berechnen.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx = P(x_1 < x < x_2) \quad (59)$$

Mit der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion lässt sich auch die Häufigkeit für das Auftreten bestimmter Amplitudenwerte in einem stationären stochastischen Signal oder den Rauschanteil $n(t)$ in einem zeitlich veränderlichen Signal. Man kann den Mittelwert also näherungsweise über die Amplitudenwerte in gewissen Zeitintervallen errechnen, siehe Abbildung 37. Dabei ist wichtig, zu beachten, dass, so lange die Anzahl der unterschiedlichen Werte klein ist, diese Form der Darstellung ideal ist. Sobald die Anzahl an unterschiedlichen Werten ansteigt, werden die Wahrscheinlichkeiten kleiner und der Anteil an Zufallsrauschen steigt. Bei einer hohen Anzahl von Werten geht man zu einer kumulativen Verteilungsfunktion(CDF über. Man summiert also alle Wahrscheinlichkeiten auf.

Unterschied zwischen Erwartungswert und Mittelwert Beim Erwartungswert wird die Stochastische Wahrscheinlichkeit berechnet. Beim Mittelwert, der Durchschnitt aus realen Messungen.

Varianz ist das \pm um den Mittelwert herum. Es handelt sich dabei um die Streuung, die mit dem Quadratischen Abstand zum Mittelwert berechnet wird.

$$\rho^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (60)$$

Die Standardabweichung ist dabei als

$$\rho = \sqrt{\rho^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (61)$$



Figure 36: Verteilung einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nach Gauss.

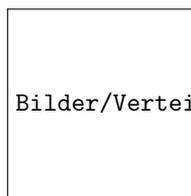


Figure 37: Verteilung von Amplitudenwerten



Figure 38: Gaussche Verteilung und Error-Funktion

für $N > 200$ definiert. Die empirische Standardabweichung $s_{\bar{x}}$ des Mittelwertes beschreibt die Streuung des Mittelwertes oder die mittlere Messabweichung des Mittelwertes.

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (62)$$

Unbekannte Verteilungsfunktionen Nicht jeder Zufallsprozess weißt eine Gauß-Verteilung auf. Wenn er das nicht tut, muss man die Wahrscheinlichkeiten schätzen. Dabei wird von der Varianz der Messwerte die Wahrscheinlichkeit geschätzt, wie sicher sich der Messwert innerhalb der Varianz um das gemessene Ergebnis befindet.

Student-Verteilung Bei kleiner Stichprobenzahl muss die Gauß-Verteilung durch die Student-Verteilung ersetzt werden. Diese entspricht einer um den Faktor t verbreiterten Normalverteilung. Die Student-Verteilung ist von der Stichprobenzahl abhängig und nähert sich für $N(N > 200)$ der Gauß-Verteilung an. Das t kann aus einer Tabelle abgelesen werden.

$$x = \bar{x} \pm t * \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (63)$$

Gauß him sein Fortpflanzungsgesetz

$$s_{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{n=1}^m \left(\frac{\delta f}{\delta x_n}\right)^2 * s_n^2} \quad (64)$$

Gauß him sein Fortpflanzungsgesetz besagt, dass man die Entfernung zwischen dem Messwert und und der Schwankung des Schätzwertes. Es geht hier in die Steigung (Gradienten) und ein paar Korrelationen.

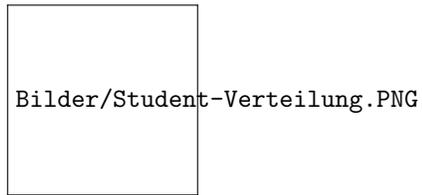


Figure 39: Student-Verteilung im Vergleich zur Normalverteilung

Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement Wichtig ist folgendes zu verstehen: Jeder Messwert hat eine Messunsicherheit. Gauß' sein Fortpflanzungsgesetz ist eine gute Richtlinie zur Bestimmung dieser Messunsicherheit. Zuerst muss man nach der Beziehung der Messgröße und den Eingangsgrößen suchen. Quereinflüsse sind dabei zu beachten. Daraus ergibt sich dann ein Schätzwert der Eingangsgrößen mit Messunsicherheit. Es folgt die kombinierte und erweiterte Unsicherheit. (Folien 566 ff)

10 Signalverarbeitung

10.1 Fourier-Transformation

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (65)$$

Die Fourier-Transformation zerlegt eine Funktion $x(t)$ in ihre Spektralen Anteile (d. h. in Sinus- und Cosinus-Schwingungen mit unterschiedlicher Frequenz). Das Ergebnis dieser Zerlegung dieser Funktion heißt **Spektrum**. Dass die Fourier-Transformation wichtig ist, belegen alleine schon die 68 Folien (Folien 579-623 über allg. FT und 624-647 über DFT) im Foliensatz. Die Symbolische Schreibweise ist $x(t) \circ \bullet X(f)$. Die inverse Funktion sieht so aus:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (66)$$

Periodische Funktionen lassen sich auch mittels der Fourier-Reihe darstellen. In der folgenden Formel ist $x(t)$ eine periodische Funktion und T_0 die Periodendauer.

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(2\pi k f_0 t) + b_k \sin(2\pi k f_0 t)] \quad (67)$$

$k = 1$ ist die Grundschiwingung ($f = f_0$), k ist die k -te harmonische Schwingung $f = k * f_0$, $\frac{a_0}{2}$ ist der DC-Anteil. Man kann die Fourier-Reihe auch Komplex darstellen, in dem man den Cosinus als komplexes Exponential darstellt. daraus folgt dann die Form:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [c_k e^{j2\pi f_0 t}] \quad (68)$$

mit

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt \quad (69)$$

um den Koeffizienten c_k nicht jedesmal über das Integral zu berechnen gibt es die Fast-Fourier-Transformation. Sie bietet eine viel einfachere und schnellere Berechnung. In Abbildung 40 sind noch mal alle Rechenregeln die Fourier-Transformation betreffend aufgelistet.

10.2 Diskrete Fourier-Transformation

Die Diskrete FT versucht aus einem Zeitdiskreten Signal eine Fourier-Transformation zu machen. Dafür muss das Signal um Zeit- und Frequenzbereich in abgetasteter Form vorhanden sein. Das Signal muss in beiden Bereichen periodisch sein. Die DFT kann mit Hilfe der Fast Fourier-Transform sehr effizient berechnet werden.

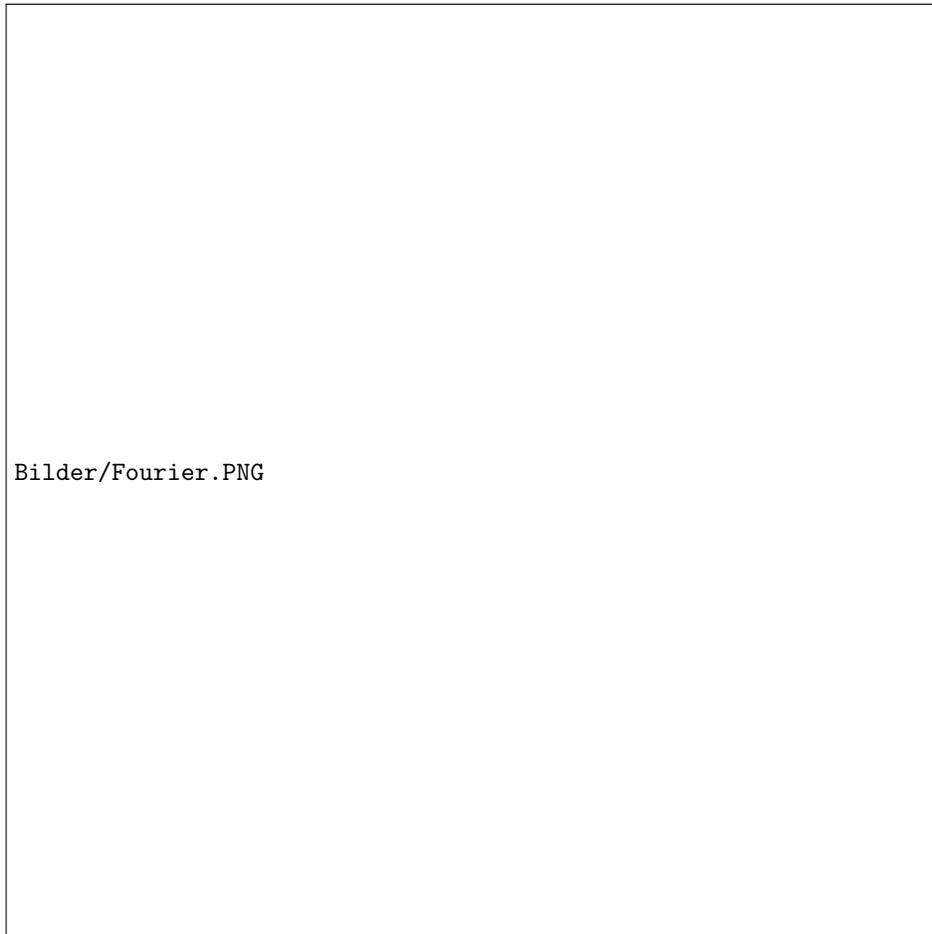
$$X[k] = N * c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \bullet \circ x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (70)$$

mit der Einführung der n -ten Einheitswurzel

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (71)$$

kann man die **DFT** auch so schreiben:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] * W_N^{k*n} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (72)$$



Bilder/Fourier.PNG

Figure 40: Alle wichtigen Regeln der Fourier-Transformation



Bilder/verschFouTra.PNG

Figure 41: Verschiedene Fourier-Transfortmationen

und

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] * W_N^{-kn} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (73)$$

Jetzt lässt sich der ganze Spaß auch in Matizen aufschreiben.

$$x_N = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad X_N = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} \quad (74)$$

Die sog. DFT-Matrix sieht folgendermaßen aus:

$$W_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & \dots & W_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \quad (75)$$

daus kan die N-Punkte-DFT mit Hilfe einer Matrix-Multiplikation geschrieben werden.

$$X_N = W_N x_N \quad (76)$$

Die Inverse berechnet sich dabei aus

$$x_N = W_N^{-1} X_N \quad \text{mit} \quad W_N^{-1} = \frac{1}{N} * W_N (\text{komplex} - \text{Konjugiert}) \quad (77)$$

N-te Einheitswurzel 71 W_N ist periodisch in n und k mit der Periode N.

DFT- Eigenschaften

- Linearität

$$\alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \circ \bullet \alpha X_1[k] + X_2[k] \quad (78)$$

- Periodizität

$$X[k] = X[k + N] \quad (79)$$

$$x[n] = x[n + N] \quad (80)$$

- Parseval-Theorem besagt, dass die Energie eines Abtastsignals sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich berechnet werden kann.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2 \quad (81)$$

- Symmetrie für ein reelles Zeitsignal

10.3 Anwendung der DFT

Die diskrete Fourier-Transformation stellt im Bereich $[0, f_s/2]$ eine Approximation der Fourier-Transformation dar. Der Abstand

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} \quad (82)$$

zweier Frequenzpunkte nennt man **Frequenzauflösung der DFT**, die Dauer NT_s heißt **Messdauer**. Da die meisten zeitdiskreten Signale nicht periodisch sind, kommt es bei einer FT zu Aliasing-Effekten. Die DFT ist dabei nur eine Approximation der FT in sehr kleinen Bereichen, doch da sie sehr schnell zu berechnen ist, lässt sich das in den zeitdiskreten Intervallen tun. Hier also die Formeln:

$$T_s = \frac{1}{f_s} \quad (83)$$

$$T = NT_s \quad (84)$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T} \quad (85)$$

Dabei ist f_s die Abtastfrequenz, T_s die Abtastzeit, N die Anzahl der Samples, T die Messdauer und Δf der Abstand zwischen zwei Frequenzpunkten nach der Transformation. Es lassen sich also immer nur zwei Parameter frei wählen, der Rest ergibt sich dann aus den beiden.

Eine Möglichkeit ist die Abtastfrequenz f_s zu wählen. Dabei ist vor allem das Abtasttheorem 57 wichtig. Dabei ist f_{max} die höchste im Signal vorkommende Frequenz.

Eine weitere Hilfestellung gibt es für die Wahl der Abtastwerte. Die Messdauer $T = NT_s$ muss mindestens so lange sein, wie das Signal vorliegt. N sollte dabei möglichst eine Zweierpotenz sein, damit die DFT mit Hilfe der FFT berechnet werden kann. Faustregel hier gilt:

$$N = \frac{f_s}{\Delta f_{max}} \quad (86)$$

10.4 Fensterfunktion und Spektralanalyse

Zur Anwendung der DFT ist eine zeitlich begrenzte Abtastfolge erforderlich. Dazu ist es notwendig die kontinuierliche Folge zeitlich zu begrenzen. Man spricht von der **Fensterung** des Abtastsignals. Um mit diesem Fenster arbeiten zu können, wird das unendliche Signal $f(t)$ mit einer (rechteckigen) Fensterfunktion $g(t)$ verrechnet. Im Frequenzbereich wird $F(\omega)$ mit $G(\omega)$ gefaltet. Gute Fensterfunktionen sind dabei Hamming, von Hann, etc. Die DFT geht von einer periodischen Fortsetzung des Signals aus. Es wäre jedoch ausgesprochenes Glück, wenn die zu untersuchende Funktion eine ganze Zahl an kompletten Signalperioden im untersuchten Zeitfenster aufweisen würde. Wenn sie das nicht tut, ist die DFT keine sonderlich gute Näherung der Fourier-Transformation. Um dieses Problem zu beheben, kann ein Zusatz-Term eingeführt werden, der eine kleine Schwingung erzeugt, und so, bei niedrigen Funktionswerten eine Möglichkeit bietet die Funktion zu fenstern. Die Idee dabei ist, nicht unsanft und irgendwo die Funktion abzuschneiden, sondern lieber mit einer anderen Funktion gegen Null laufen lassen. Rechteckfunktionen sind für viele Anwendungen allerdings ungeeignet. Mehr Nullstellen helfen. Wichtig ist also: je mehr Nullstellen die Fensterfunktion hat, desto besser. Das Samplingintervall Δt sollte möglichst fein gewählt sein. Daraus folgt eine höhere Nyquistfrequenz, und die ist wiederum gut, um die spektrale Intensität zu reduzieren, die vor allem bei der periodischen Fortsetzung ein Problem sein kann und damit näherungsweise verschwindet.

Vergleich üblicher Fensterfunktionen Das folgende Beispiel ist ein Messsignal mit 128 Punkten und der Berechnung des Spektrums mit der Rechteck-, der von Hann- und der Hamming-Fensterfunktion. Andere, hier nicht vertiefte Funktionen sind Kaiser-Bessel, Turkey-Fenster und Blackman-Fenster. Fensterfunktionen sind stets ein Kompromiss zwischen der Nebenliniendämpfung und der Breite des Haupt-Peaks.

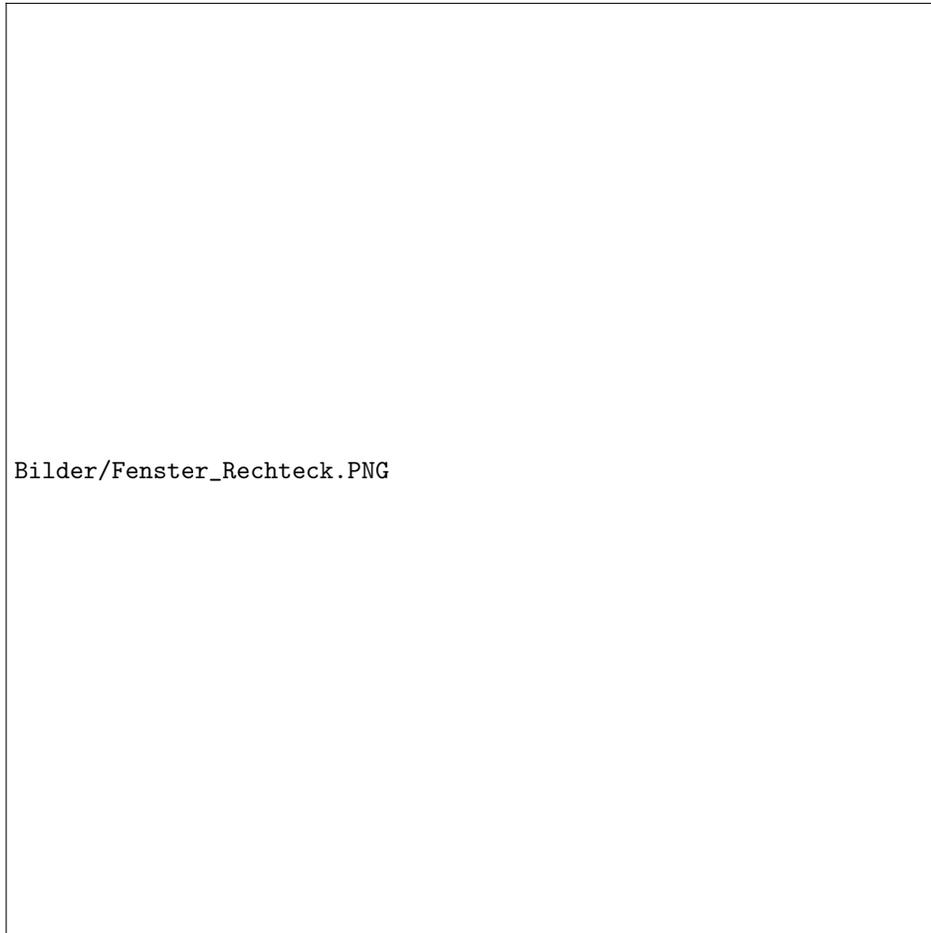
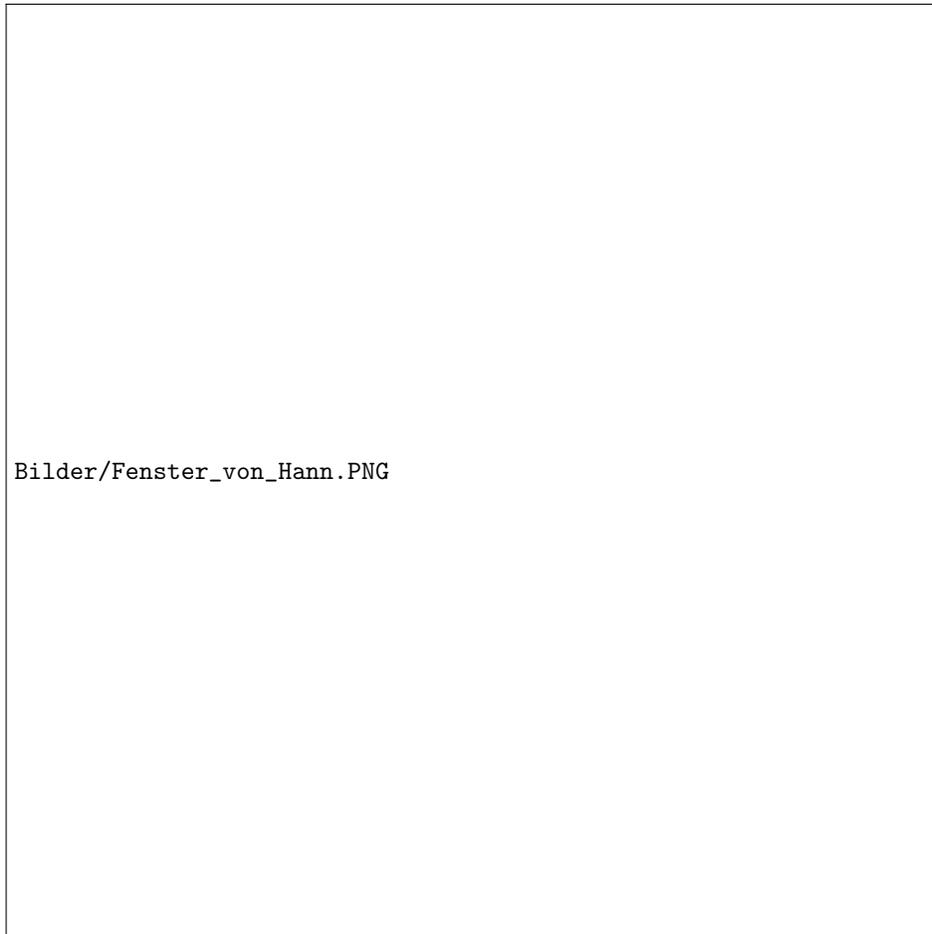


Figure 42: Rechteck-Fensterfunktion

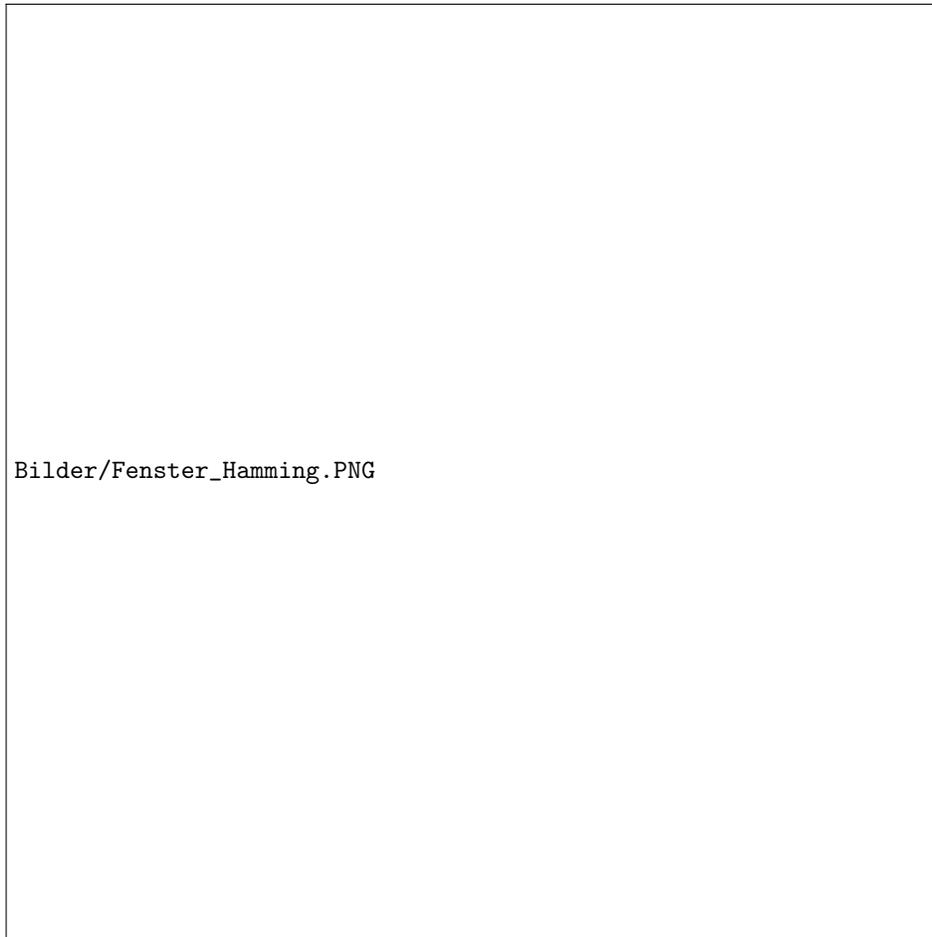
Fenster-Funktionen	Dämpfung der höchsten Nebenlinie in dB	Nebenlinien-dämpfung (dB/Oct)	6 dB-Peak-Breite
Rechteck	-13	-6	1.21
von Hann	-32	-18	2.00
Hamming	-43	-6	1.81
Blackman	-58	-18	2.35

Table 1: Übersicht gängiger Fensterfunktionen



Bilder/Fenster_von_Hann.PNG

Figure 43: von Hann- Fensterfunktion



Bilder/Fenster_Hamming.PNG

Figure 44: Hamming-Fensterfunktion

10.5 Fast and Furious Fourier-Transformation

Die FFT ist keine neue Transformation sondern nur ein eleganter Algorithmus zur Berechnung der DFT. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus, der aus einer quadratischen Laufzeit eine schnellere (aber immernoch quadratische) Laufzeit macht. Der erste Schritt ist alle Messpunkte nach geradem und ungerade Index der Messreihe zu sortieren. Die dadurch entstandenen Listen sind nur noch halb so lang. Wenn man diese nun wieder diskret Fourier-Transformiert, so hat man die Anzahl der Rechenoperationen deutlich gesenkt, da man jetzt nur noch $2(N/2)^2 + N$ berechnen muss. Das ist immer noch schneller als N^2 . Ist N eine Zweierpotenz, so lässt sich der Vorgang mehrfach wiederholen. Die Anzahl der Zerlegungsschritte wird dann zu $q = \log_2(N)$. Die nächste Verbesserung ist die Butterfly-Operation. Dabei werden (nur) zwei komplexe Multiplikationen ausgeführt. Daraus resultiert pro Zerlegungsebene ein Rechenaufwand von N Multiplikationen. Der Gesamtaufwand für N -Punkte FFT: $N \log_2(N)$. Mit dieser Funktion lässt sich alles noch einmal beschleunigen, und so kommen wir am Ende auf eine Anzahl an komplexen Multiplikationen von $\frac{N}{2} \log_2(N)$. Es gibt sehr viele Programme, die für einen allerdings dieses Problem lösen, so dass man gar nicht in die Not kommt je einen solchen Algorithmus schreiben zu müssen.

11 Digitale Filter

Das ist schön. Wir hören nicht mit der Mathematik auf, im Gegenteil: wir fangen gerade erst an. In diesem Kapitel werden wir uns mit der z-Transformation und dem Entwurf von IIR (infinite impulse response)-Filtern beschäftigen. Yay.

Digitale Filter sind anscheinend allgegenwärtig. Sie sind leicht zu implementieren, schnell zu ändern und haben steile Flanken, so dass sie sehr präzise sein können. Analoge Filter werden oft nur noch als Anti-Aliasing-Filter bei der A/D-Wandlung und als Smpoothing-Filter bei der D/A-Wandlung eingesetzt. Digitale (LTI-) Filter können in **Fintie impulse Response** Filter ohne Rückkopplung und als **infinite impule response** Filter unterteilt werden. Dabei gibt es zwei Gleichungen:

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] \quad (87)$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] \quad (88)$$

Die Idee ist also folgende: Idealer weise lässt ein Filter die gewünschten Signale unverändert durch **Durchlassbereich**), und blockiert alle unerwünschten (**Sperrbereich**). Dazwischen liegt der **Übergangsbereich**. Ein Rechteckiger Amplitudengang hätte allerdings unendliche Ordnung, und ist deshalb nicht realisierbar. Jeder Filter hat deshalb einen Toleranzbereich, indem sich der Amplitudengang des Filters befinden darf.

FIR-Filter Vorteile:

- können für nahezu jeden beliebigen Frequenzgang mit vertretbarem Mehraufwand entworfen werden.
- Betrag und Phase des Durchlassbereiches können voneinander unabhängig gewählt werden.
- sind immer BIBO-Stabil

Nachteile:

- sind rechenintensiver als IIR
- benötigen eine komplexeres Entwurfsverfahren.

IIF-Filter brauchen eine deutlich geringere Rechenleistung. Nachteil ist allerdings dass Betrag und Phase im Durchlassbereich von einander abhängig sind. Es kann bei der Realisierung in Fixed-Point-Arithmetik zu Rundungsrauschen kommen.

IIR-Filter lohnen sich, wenn man nur scharfe Flanken und eine hohe Datenrate hat. Wenn man saubere Übertragung von Daten braucht, empfiehlt sich der FIR-Filter.

Symmetrie tritt auf, wenn die Impulsantwort spiegel- oder punktsymmetrisch ist. Symmetrische Filter haben abgesehen von 180-Grad-Phasenspürungen einen linearen Phasengang.

Filter mit konstanter Gruppenlaufzeit haben die angenehme Eigenschaft, dass sie Signale im Durchlassbereich nicht verzerren sondern nur verzögern. Die Symmetrie des Impulses bleibt erhalten.

11.1 Entwurf von FIR-Filtern

Es gibt zwei wichtige Methoden um einen FIR-Filter zu entwerfen: die Fenstermethode und die Optimalmethode. schauen wir uns also zu erst die Fenstermethode an.

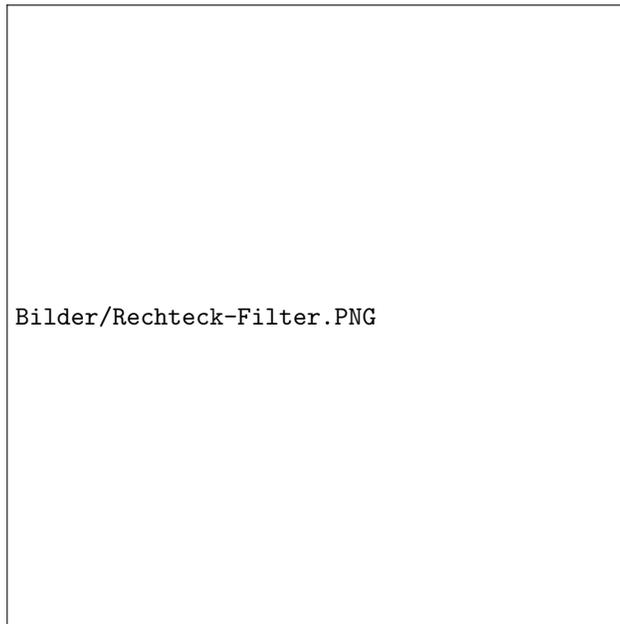


Figure 45: Filter mit Rechteck als Fensterfunktion

11.1.1 Fenstermethode

Die Fenstermethode hat 5 Entwurfsschritte:

- Festlegen der Eckfrequenzen (ideale Rechteckfunktion)
- Berechnung der entsprechenden Filter-Impulsantwort
- Multiplikation der Idealen Impulsantwort mit einer geeigneten Fensterfunktion
- Berechnen des entsprechenden Frequenzgangs. Hier wird auch die Vorgaben überprüft.
- Verzögern der resultierenden Impulsantwort

Dieses Konzept wird auf den Folien (713 ff.) ausführlich vorgestellt.

Entscheidend für das Ergebnis ist natürlich die Wahl der Fenstermethode. Hier also ein kleiner Überblick:

Rechteck hat große Rippel im Amplitudengang und das Toleranzschema ist nicht Teil des Entwurfs, sondern mehr oder weniger zufällig. Generell eine schlechte Fensterfunktion.

Hanningfenster Die Rippel sind kleiner als bei der Rechteckfunktion, aber sonst sind sie auch nicht besser. Im Gegenteil. Die Flankensteilheit ist schlechter.

Kaiserfenster ist also die Rettung. Es hat einen zusätzlichen Parameter, den man frei wählen kann, und dadurch lässt sich ein Toleranzbereich festlegen. Die Filterordnung ist etwas hoch, da das Toleranzschema nicht optimal ausgenutzt wird.



Figure 46: Filter mit Hann-Fensterfunktion

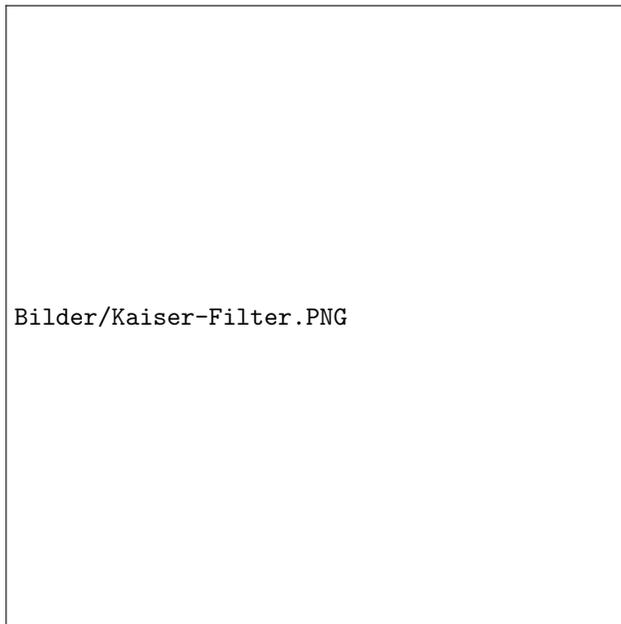


Figure 47: Filter mit Kaiser-Fensterfunktion

11.1.2 Optimalmethode

Diese Methode hat viele Namen. Remez-Entwurf, Equiripple-Verfahren, Chebychev-Approximation. . . Alles Namen, einer unaussprechbarer als der andere. Mit dieser Methode lassen sich FIR-Filter entwerfen, welche eine Gleichmäßige Welligkeit im Durchlass- und im Sperrbereich haben. Die daraus resultierenden Filterordnungen N sind im allgemeinen wesentlich kleiner als bei einem Fensterentwurf. Sie ist das Standardverfahren zum Entwurf digitaler FIR-Filter und in fast jedem Programm-Paket zur Signalverarbeitung. Um den Entwurf zu überprüfen können Nullen (zero padding) angehängt werden, und dann mit Hilfe der FFT in den Frequenzbereich transformiert werden.

11.2 IIR-Filter

11.2.1 z-Transformation

Ok, reden wir über **Infinite Impulse Response**-Filter. Das Problem ist, die sind nicht mit einer einfachen Fourier-Transformation (Gleichung 78) berechnen lassen. Das Problem ist, dass nicht alle Signale (und damit Funktionen) konvergent sind. Und das ist für die Fourier-Transformation wichtig. Deshalb kann man die Konvergenz eines Fourier-Integrals erzeugen, in dem man eine Wichtungsfunktion vor der Transformation mit dem Signal multipliziert. Dadurch kann für sehr viele Funktionen eine Konvergenz sichergestellt werden.

Laplace-Transformation Dieses Integral wird nun als **Laplace-Transformation** bezeichnet. Es gibt zwei Wichtungsfunktionen, die im Foliensatz auf Folie 741 abgedruckt sind. Für die Laplace-Transformation gilt nun $s = \alpha + j * 2\pi f$. Das ist wichtig, weil nun ergibt sich die Form:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (89)$$

Die Laplace-Transformation ist auf einen größeren Bereich von Funktionen anwendbar, als die Fourier-Transformation. Es gibt kein Problem mit Stufen-, Rampen- und Exponentialfunktionen. Es gibt auch ein paar Funktionen, die keine Laplace-Transformation besitzen, aber diese tauchen in der Realität nicht auf. Es existiert eine Version der Laplace-Transformation, die es erlaubt, Schalter und Anfangsbedingungen in der Systemanalyse zu berücksichtigen.

Das Problem mit der Laplace-Transformation ist, dass es schwierig ist, die Laplace-Transformierte eines Signale numerisch zu berechnen. Doch das eigentliche Problem tritt bei der Darstellung auf. Um dieses Problem zu lösen beschränkt man sich meistens auf die Pole, Nullstellen und Konvergenzbereiche. Die Darstellung der Impulsantwort eines Filters zeigt noch ein paar andere Eigenschaften. (Kausalität, Stabilität, Hochpass, Tiefpass oder Kammerflimmern, linearphasig, oder minimalphasen)

Die **z-Transformation** ist jetzt eine Abwandlung der LPT(Laplace-Transformation). Die Idee ist, die kontinuierliche Variable t (über die integriert wird) durch einen diskreten Index n zu ersetzen. Diese Idee ist vor allem in der Informatik derdacht worden, und eigent sich in Kombination mit einem n -langen Array. An Stelle der Laplace'schen Abkürzung $s = \alpha + j2\pi f$ wird $z = e^{sT}$ ersetzt. Das führt zu folgender Transformation:

$$X_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (90)$$

Im Allgemeinen unterscheiden sich die LPT und die zT(z-Transformation) kaum. Sie haben die selben Vor- und Nachteile, durch die Variablensubstituion sind ihre Null- und Polstellen etwas verschoben. Trotzdem sind sie sich ähnlich und man kann beide in einander überführen. Die dafür nötige Formel ist $z = e^{sT}$.

11.2.2 Eigenschaften

Natürlich haben IIR-Filter viele Eigenschaften. Sie sind im Foliensatz auf Folie 790ff zu sehen, zusammen mit sehr, sehr vielen Formeln. Wichtig ist nur, dass die Impulsantwort unendlich lang ist, aber auf Grund der Stabilität gegen Null strebt. Darüber hinaus haben sie den Vorteil, dass sie mit weniger Ordnungne (also Ableitungen und zT und damit Rechenaufwand) ein gegebenes Toleranzschema erfüllen können als ein FIR-Filter. Der Nachteil ist, dass es zu Signalverzerrungen im Durchlassbereich kommt.

11.2.3 Entwurf

Das Design verläuft hier auch nicht anders, als bei FIR-Filtern.

- Festlegen des Toleranzschemas
- Überführung des Digitalen anspruches auf einen analogen Filter
- Entwurf des Analogfilters
- Bestimmung der Übertragungsfunktion
- Transformation der Übertragsformation mit der zT.

Der Vorteil einer solchen Variante ist, dass die Analogen Lösungen schon gut erforscht sind, es Vorlagen und Tabellen gibt und meist die Analogen Filter eh digital für die Simulation benötigt werden. Dabei wird vor allem die Bilinare Transformation benutzt. Wer es genau wissen will findet den Prozess auf den Folien 806-838.

Wichtig ist, dass durch Fixed-Pointer-Arithmetik kann es bei der Quantisierung der Filterkoeffizenten zu Rundungsrauschen kommen.

12 Kalman Filter

Kommen wir zum letzten Kapitel. Auf nur 81 Folien erfahren wir nun, wie man eine Rakete zum Mond schießt und dann immer noch weiß, wo sie ungefähr, genau ist.

Wie sollen wir ein System steuern, wenn wir eine zu große Messunsicherheit, meist durch lautes Rauschen, haben? Wir haben eine Vorhersage, wie sich das System verhalten wird, aber die Realität muss nicht mit unseren Berechnungen übereinstimmen. Wenn wir aber nur zu einem gewissen Grad das System dann messen können, woher wissen wir, was jetzt Richtig ist? Unsere Vorhersage oder die Messung?

Nun, dieses Problem wird mit dem Kalman-Filter gelöst. Dabei wird aus den letzten Messungen die Flugbahn berechnet und mit dem neuen Messwert verglichen. Mit einer hohen Wahrscheinlichkeit befindet sich der Realwert irgendwo in der Mitte zwischen der Messung und dem errechneten Ergebnis. Dabei gibt es jetzt ein paar coole Formeln, die, wie ich finde immer Anwendungsspezifisch sind. Generell kann man aber davon ausgehen, dass es sich um Formeln aus der Vorlesung "Systemtheorie und Regeltechnik" handelt. Also ein LIT, mit Zustandsraum-Darstellung und der zu erwartenden A , B , C und D Matrizen. Nach der Bestimmung des nächsten Zustandes, wird an dieser Position eine Wahrscheinlichkeitsglocke aufgestellt. Also eine Gauss'sche Normalverteilung mit dem Höhepunkt an dem neuen, errechneten Zustand.

Der nächste Schritt ist die möglichst genaue Messung des Systems. Auf dem Messwert wird auch wieder eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ausgebreitet. Wenn man jetzt die Wahrscheinlichkeitsfunktionen zusammen addiert erhält man eine neue Glocke, die mit einer relativ hohen Wahrscheinlichkeit den Realwert einschließt. Das ist dann die beste Näherung an den Realwert, die man erreichen kann.

Anwendung Heute ist der Kalman-Filter einer der meist genutzten Algorithmen zur Näherung von linearen und nichtlinearen Systemen. Der Vorteil ist, dass man Stochastische und Systematische Messfehler los wird. Solch ein Filter lässt sich in modernen eingebetteten Systemen besonders gut umsetzen. Je besser man das System versteht, desto besser kann man den Filter einstellen und damit das Ergebnis verbessern. Der Filter steckt in Satelliten für die Positionsbestimmung, Autos für Geschwindigkeit und Richtung und wird an der Börse benutzt um den Verlauf des Marktes vorher zuzusagen.